高一数学　新编教案

目录

一、集合及其表示方法.. 2
二、集合之间的关系.. 5
三、集合的运算.. 9
四、命题的形式及等价关系.. 13
六、不等式的基本性质.. 17
七、一元二次不等式的解法.. 20
八、一元二次不等式的应用.. 25
九、其他不等式的解法.. 29
十、　基本不等式.. 33
十一、不等式的证明.. 37
十二、函数的概念.. 40
十三、函数关系的建立.. 45
十四、函数的奇偶性.. 48
十五、函数的单调性.. 51

一、集合及其表示方法

【知识梳理】

（一）集合的有关概念：

由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体、一些人组成的.我们说，每一组对象的全体形成一个集合，或者说，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

定义：一般地，某些确切指定的对象集在一起就成为一个集合.

1、集合的概念

（1）集合：某些指定的对象集在一起就形成一个集合（简称集）。

（2）元素：集合中每个对象叫做这个集合的元素。

[例]判断下列对象能否组成集合？

(1)不等式 2x－5＜0 的正整数解；　(2)方程 x＋2y－1＝0 的解；

(3)数轴上非常靠近原点的点；　(4)使| x－1|的值很小的 x 的值。

2、常用数集及记法

（1）非负整数集（自然数集）：全体非负整数的集合.记作 N，$N=\{0,1,2,\cdots\}$

（2）正整数集：非负整数集内排除 0 的集.记作 N^*或 N_+，$N^*=\{1,2,3,\cdots\}$

（3）整数集：全体整数的集合.记作 Z，$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

（4）有理数集：全体有理数的集合.记作 Q，$Q=\{整数与分数\}$

（5）实数集：全体实数的集合.记作 R　$R=\{数轴上所有点所对应的数\}$

注：（1）自然数集与非负整数集是相同的，也就是说，自然数集包括数 0。

（2）非负整数集内排除 0 的集.记作 N^*或 N_+ .Q、Z、R 等其它数集内排除 0 的集，也是这样表示，例如，整数集内排除 0 的集，表示成 Z^*

3、元素对于集合的隶属关系

（1）属于：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 a∈A

（2）不属于：如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$

4、集合中元素的特性

（1）确定性：按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里，或者不在，不能模棱两可。

（2）互异性：集合中的元素没有重复。

（3）无序性：集合中的元素没有一定的顺序（通常用正常的顺序写出）

5、⑴集合通常用大写的拉丁字母表示，如 A、B、C、P、Q……

元素通常用小写的拉丁字母表示，如 a、b、c、p、q……

⑵“∈”的开口方向，不能把 a∈A 颠倒过来写。

[例]用符号∈、$\notin$填空：

（1）0____$\{0\}$；（2）0____$\varnothing$；（3）0____N；

（4）0____Z；（5）$\sqrt{2}$____Q；（6）-2____Z。

（二）集合的表示方法

1、列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合。

例如，由方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合，可以表示为{-1，1}

注：a 与{a}不同：a 表示一个元素，{a}表示一个集合，该集合只有一个元素。

2、描述法：用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合，并把这个条件写在大括号内表示集合的方法。格式： A＝{x|x 满足性质 p}。
例如，不等式 $x-3>2$ 的解集可以表示为：$\{x\in R\mid x-3>2\}$ 或 $\{x\mid x-3>2\}$。
所有直角三角形的集合可以表示为：$\{x\mid x\text{是直角三角形}\}$
注：（1）在不致混淆的情况下，可以省去竖线及左边部分。如：{直角三角形}；{大于 10^4 的实数}
（2）错误表示法：{实数集}；{全体实数}

3、文氏图：用一条封闭的曲线的内部来表示一个集合的方法。

4、何时用列举法？何时用描述法？
⑴有些集合的公共属性不明显，难以概括，不便用描述法表示，只能用列举法。如：集合 $\{x^2,3x+2,5y^3-x,x^2+y^2\}$
⑵有些集合的元素不能无遗漏地一一列举出来，或者不便于、不需要一一列举出来，常用描述法。
如：集合 $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$；集合{1000 以内的质数}

例 集合 $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$ 与集合 $\{y\mid y=x^2+1\}$ 是同一个集合吗？
答：不是。因为集合 $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$ 是抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点构成的集合，集合 $\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\ge 1\}$ 是函数 $y=x^2+1$ 的所有函数值构成的数集。

（三） 有限集与无限集
1、有限集：含有有限个元素的集合。
2、无限集：含有无限个元素的集合。
3、空集：不含任何元素的集合。记作Φ，如：$\{x\in R\mid x^2+1=0\}$

【例题解析】
例 1、 给出下列几组对象：
（1）高一数学的所有难题；（2）绝对值最小的数（3）平面内到已知点的距离等于已知长的所有点。以上对象可以构成集合的序号是________________。

例 2、 （1）用描述法表示下列集合
①{1，4，7，10，13}
②{-2，-4，-6，-8，-10}
（2）用列举法表示下列集合
①{（x，y）|x∈{1，2}，y∈{1，2}}
② $\{(x,y)\mid \begin{cases}x+y=2\\ x-2y=4\end{cases}\}$
③ $\{x\mid x=(-1)^n,n\in N\}$
④ $\{(x,y)\mid 3x+2y=16,x\in N,y\in N\}$
⑤ $\{(x,y)\mid x,y\text{分别是4的正整数约数}\}$

例 3、已知集合 A＝{2，a^2＋1，a^2－a}，B＝{0，7，a^2－a－5，2－a}，若 5∈A，求集合 B。

例 4、已知集合 $A=\left\{x\,|\,a\,x^2-3\,x+2=0\,,a\in R\,,x\in R\right\}$.

（1）若 A 是空集，求 a 的取值范围；

（2）若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并写出这个元素；

（3）若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

例 5、设集合 A 是实数集合，满足若实数 $t\in A$，则 $\dfrac{1}{1-t}\in A$（其中 $0\notin A\,,1\notin A$）。

（1）已知 $2\in A$，求集合 A；

（2）集合 A 能否为单元素的集合？若能，求出集合 A；若不能，说明理由。

【基础练习】

1. 下列各组对象能确定一个集合吗？

（1）所有很大的实数.

（2）好心的人.

（3）1，2，2，3，4，5.

2. 设 a,b 是非零实数，那么 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$ 可能取的值组成集合的元素是___.

3. 数集 $\left\{0\,,1\,,x^2-x\right\}$ 中的 x 不能取的数的集合为________________。

4. 若集合 $A=\{2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，且 $1\in A$，则实数 $a=$_________。

5．给定下列集合：$A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x+1\geq 0\}$，$C=\{x\,|\,x^2-2x+1\leq 0\}$。 其中有限集为_______________。

6. 由实数 x, －x, | x |, $\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含（　　）.

（A）2 个元素　（B）3 个元素　（C）4 个元素　（D）5 个元素

7. 关于 x 的方程 ax＋b=0，当 a, b 满足条件____时，解集是有限集；当 a, b 满足条件_____时，解集是无限集.

8．方程组 $\begin{cases}2x+y=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集为______________。

9. 用列举法表示下列集合：

（1）{15 的正约数}，（2）$\{x\,|\,x=\sqrt{a}\,,a<36\,,x\in N^{*}\}$，（3）$\{(x\,,y)\,|\,y=x^{2}-1\,,|\,x\,|\le 2\,,x\in Z\}$.

10. 用描述法表示下列集合：

（1）偶数集，　（2）被 3 除余 1 的整数集，　（3）直角坐标系第二象限内的点集.（4）曲线 $x^2-3y^2=1$ 构成的点集。（5）函数 $y=-x^2+3$ 的函数值组成的集合。

11. 已知集合 $A=\{-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,3\}$，$B=\{x\,|\,x=|\,y\,|\,,y\in A\}$，求 B .

12. 设集合 $M=\left\{x\,|\,x\in N\text{且}\dfrac{12}{6-x}\in N\right\}$，用列举法写出集合 M .

二、集合之间的关系

【知识梳理】

1、子集：一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A。

记作: $A\subseteq B$或$B\supseteq A$ ，读作：A 包含于 B 或 B 包含 A

若任意$x\in A\Rightarrow x\in B$，则$A\subseteq B$

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记作 A$\not\subseteq$B 或 B$\not\supseteq$A

注：$A\subseteq B$ 有两种可能（1）A 是 B 的一部分,；（2）A 与 B 是同一集合。

2、集合相等：一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A **等于**集合 B，记作 A=B。

3、真子集：对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，并且 $A \neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作：A$\subsetneqq$B 或 B$\supsetneqq$A，读作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A。

4、子集与真子集符号的方向。

如$A \subseteq B$与$B \supseteq A$同义；$A \subseteq B$与$A \supseteq B$不同

5、空集是任何集合的子集。Φ $\subseteq$A

空集是任何非空集合的真子集。Φ$\subsetneqq$A　若 A≠Φ，则Φ$\subsetneqq$A

任何一个集合是它本身的子集。$A \subseteq A$

6、易混符号

①“$\in$”与“$\subseteq$”：元素与集合之间是属于关系；集合与集合之间是包含关系。如

$1 \in N, -1 \notin N, N \subseteq R$, Φ $\subseteq$R，{1}$\subseteq${1，2，3}

②{0}与Φ：{0}是含有一个元素 0 的集合，Φ是不含任何元素的集合。

如　Φ $\subseteq${0}。不能写成Φ={0}，Φ∈{0}

【例题解析】

例 1、（1）　写出 N，Z，Q，R 的包含关系，并用文氏图表示。

（2）　判断下列写法是否正确①Φ $\subseteq$A　②Φ$\subsetneqq$A　③$A \subseteq A$　④A$\subsetneqq$A

例 2、（1）填空：N___Z,　N___Q,　R___Z,　R___Q，Φ___{0}

（2）若 A={x∈R|x^2-3x-4=0},B={x∈Z||x|<10},则 A$\subseteq$B 正确吗？

（3）是否对任意一个集合 A，都有 A$\subseteq$A，为什么？

（4）集合{a,b}的子集有那些？

（5）高一（1）班同学组成的集合 A，高一年级同学组成的集合 B，则 A、B 的关系为_____.

例 3、已知集合 A＝{1，a，b}，B＝{a，a^2，ab }，若 A＝B，求实数 a，b 的值。

例 4、已知集合 A＝{x|－2≤x≤4}，B＝$\{x \mid x<a，a \in R\}$，若 A$\subseteq$ B，求实数 a 的取值范围。

变式 1：集合 B＝$\{x \mid -2a-2<x<a+1\}$呢？

变式 2：在变式 1 的基础上，改 A⊆ B 为 B⊆ A 呢？

例 5、**子集的个数：**

(1)集合{a,b}的所有子集的个数是____个，即________________。

(2) 集合{a,b,c}的所有子集的个数是____个，即______________________________________。

猜想：(1)集合{a,b,c,d}的所有子集的个数是多少？

(2)集合 $\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$ 的所有子集的个数是多少？

结论：含 n 个元素的集合 $\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$ 的所有子集的个数是___________，所有真子集的个数是_________，非空真子集数为______________。

例 6、已知集合 P＝{x|x²＋x－6＝0}，Q＝{x|ax＋1＝0}，若 Q⫋ P，求实数 a 的取值范围。

***例 7、设集合 $S=\{\,x\,|\,x=2n+1\,,n\in Z\,\}$，$T=\{\,x\,|\,x=4k\pm1\,,k\in Z\,\}$，试判断 S 和 T 之间的关系.

****例 8、设集合 $M=\{t\,|\,t=m^2-n^2\,,m\,,n\in Z\}$

（1）证明：{奇数}是 M 的真子集；（2）若偶数 $2k\in M$，则整数 k 应满足什么条件？

（3）求证：集合 M 中任意两个元素的积仍然是集合 M 中的元素。

【基础练习】

1．设 $A=\{\,y-1\,,x-2\,\}$，$B=\{y-x\,,2y-3\,\}$，若 $A=B$，求 $x\,,y$．

2．含三个实数的集合可表示为$\{a,\frac{b}{a},1\}$，也可表示为$\{a^2,a+b,0\}$，求a、b的值。

3．若$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2\}$，$C=\{0,2\}$，试求同时满足上述条件的集合A．

4.已知集合A＝{x|－1≤x≤5}，B＝$\{x\mid -2a+1<x<2a+1\}$，若B⊆ A，求实数a的取值范围。

5．已知集合P＝{1，3，t}，Q＝{1，t^2－t＋1}，若P⊇ Q，求实数t的值。

6．已知集合A＝{x| x^2－3x＋2＝0}，B＝{x| x^2－ax＋4＝0}，若B⊆ A，求实数a的取值范围。

7. 下列结论正确的是（　　）.

A. $\varnothing \subsetneqq A$　　B. $\varnothing\in\{0\}$　　C. $\{1,2\}\subseteq Z$　　D. $\{0\}\in\{0,1\}$

8. 若 $\{1, 2\} = \{x \mid x^2 + bx + c = 0\}$，则（　　）.

A. $b=-3$, $c=2$　　B. $b=3$, $c=-2$　　C. $b=-2$, $c=3$　　D. $b=2$, $c=-3$

9. 满足 $\{a, b\}\subseteq A\subsetneqq\{a, b, c, d\}$ 的集合 A 有_______ 个.

10. 某工厂生产的产品在质量和长度上都合格时，该产品才合格. 若用 A 表示合格产品的集合，B 表示质量合格的产品的集合，C 表示长度合格的产品的集合. 则下列包含关系哪些成立？ 试用 $Venn$ 图表示这三个集合的关系.

11．设集合 $A=\{x\,|\,2a<x\le 4\}$，$B=\{x\,|\,2\le x\le 3a+1\}$，若 $B\subseteq A$，且 $B\ne\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

12．若 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\,|\,ax-2=0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 组成的集合 C．

三、集合的运算

【知识梳理】

一、交集与并集

1．交集的定义

一般地，由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合,叫做 A,B 的交集.

记作 A⋂B（读作‘A 交 B’），即 A⋂B=｛x|x∈A，且 x∈B｝.

如：｛1,2,3,6｝⋂｛1,2,5,10｝=｛1,2｝. 又如：A＝｛a,b,c,d,e｝,B={c,d,e,f}.则 A⋂B={c,d,e}.

2．并集的定义

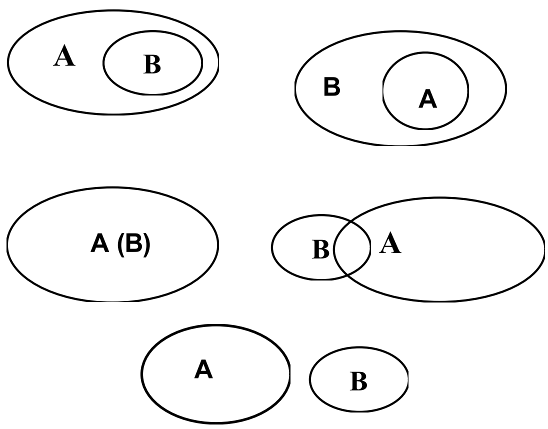
一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集.

记作：A⋃B（读作‘A 并 B’），即 A⋃B ={x|x∈A，或 x∈B}).

如：｛1,2,3,6｝⋃｛1,2,5,10｝=｛1,2,3,5,6,10｝.

3．交集、并集的性质

用文图表示



(1)若 A⊇B,则 A⋂B=B　A⋃B=A

(2)若 A⊆B 则 A⋂B=A　A⋃B=B

(3)若 A=B, 则 A⋂B=A　A⋃B=A

(4)若 A,B 相交，有公共元素，但不包含，则

A⋂B $\subsetneqq$A,A⋂B$\subsetneqq$B

A⋃B$\supsetneqq$A, A⋃B$\supsetneqq$B

(5) 若 A,B 无公共元素，则 A⋂B=Φ

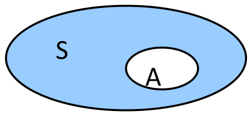
(6) A⋂Φ=Φ，A⋃Φ=A

(7) $A\bigcap B=B\bigcap A$，$A\bigcup B=B\bigcup A$

(8) $\Phi\subseteq A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B$

二、全集与补集

1 补集：一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $C_S A$，



即 $C_SA=\{x\mid x\in S,且x\notin A\}$

2、性质：$C_S(C_SA)=A$ ，$C_SS=\phi$，$C_S\phi=S$

3、全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用 U 表示。

4、 德摩根律：$(C_uA)\ \bigcap\ (C_uB)=C_u(A\bigcup B)$, $(C_uA)\ \bigcup\ (C_uB)=C_u(A\bigcap B)$(可以用韦恩图来理解).

5、补集的性质：①$A\bigcup\ (C_uA)=U$,　②$A\bigcap\ (C_uA)=\Phi$.

【例题解析】

例 1 （1）设 A=｛x|x>-2｝,B=｛x|x<3｝，求 $A\bigcap B$.

（2）设 A=｛x|x 是等腰三角形｝，B=｛x|x 是直角三角形｝，求 $A\bigcap B$.

（3）A=｛4,5,6,8｝,B=｛3,5,7,8｝，求 $A\bigcup B$.

例 2、已知全集 U＝R，集合 A＝｛x｜1≤2x＋1＜9｝，求 $C_U A$。

例 3、 已知 S＝｛x｜－1≤x＋2＜8｝，A＝｛x｜－2＜1－x≤1｝，B＝｛x｜5＜2x－1＜11｝，讨论 A 与 $C_S B$ 的关系。

例 4（1）设 A=｛x|-1<x<2｝,B=｛x|1<x<3｝，求 A∪B.

（2）设 A=｛(x,y)|y=-4x+6｝,B=｛(x,y)|y=5x-3｝,求 A⋂B.

（3）设 U=｛1,2,3,4,5,6,7,8｝,A=｛3,4,5｝,B=｛4,7,8｝,求 C_UA, C_UB, $(C_UA)\bigcap(C_UB)$, $(C_UA)\bigcup(C_UB)$, $C_U(A\bigcup B)$, $C_U(A\bigcap B)$.

（4）集合 U＝｛(x，y)｜x∈｛1,2｝,y∈｛1,2｝｝，A＝｛(x，y)｜x∈N*,y∈N*,x+y=3｝，求 C_UA.

例 5、已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2+px+1=0,x\in R\right\}$.

（1）若 $A\bigcap R=\varnothing$，求实数 p 的取值范围；

（2）设全集 $U=\{x\,|\,|x|\le 2,x\in Z\}$，若 $A=\{x_0\}$，求集合 C_UA。

★★★例 6、对于任意两个集合 X 和 Y，$X-Y$ 是指所有属于 X，但不属于 Y 的元素的集合，X 和 Y 的对称差 $X\Delta Y=(X-Y)\bigcup(Y-X)$．设集合 $A=\{y\,|\,y=x^2,x\in R\}$，$B=\{y\,|-3\le y\le 3\}$，求 $A\Delta B$.

★★★例 7、集合 $A=\{y\,|\,y=x+1,-1\le x\le k\}$，$B=\{y\,|\,y=x^2,-1\le x\le k\}$，(其中 $k>-1$)。

（1）求集合 A、B；（2）若 $A=B$，求实数 k 的值。

【基础练习】

1、已知全集U＝{x｜－1＜x＜9}，A＝{x｜1＜x＜a}，若A≠ϕ，则a的取值范围是　（　）

（A）a＜9　（B）a≤9　（C）a≥9　（D）1＜a≤9

2、已知全集U＝｛2，4，1－a｝，A＝｛2，a^2－a＋2｝。如果C_UA＝｛－1｝，那么a的值为__

3、已知全集U，A是U的子集，ϕ是空集，B＝C_UA，求C_UB，$C_U\phi$，C_UU。

4、设U=｛梯形｝,A=｛等腰梯形｝,求C_UA.

5、已知U=R，A=｛x|x^2+3x+2<0｝，求C_UA.

6、P=｛a^2,a+2,-3｝,Q=｛a-2,2a+1,a^2+1｝,P$\bigcap$Q=｛-3｝,求a.

7、已知集合A={y|y=x^2-4x+5},B={x|y=$\sqrt{5-x}$}，求A$\bigcap$B,A$\bigcup$B.

8、集合M=｛(x,y)|｜xy｜=1,x＞0｝,N=｛(x,y)|xy=-1｝,求M$\bigcup$N.

9、（1）设$A=\left\{y\mid y=x^2-1,x\in R\right\}$，$B=\left\{y\mid y=-2x^2+2,x\in R\right\}$，求$A\bigcap B$.

（2）设$A=\left\{(x,y)\mid y=x^2-1,x\in R\right\}$，$B=\left\{(x,y)\mid y=-2x^2+2,x\in R\right\}$，求$A\bigcap B$.

10、若 $A=\{x\mid x^2-ax+15=0, x\in Z\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+b=0, x\in Z\}$，若 $A\cup B=\{2,3,5\}$，求 a, b 的值．

11、已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，且 $A\cup B=A$，求 a 的值．

12、已知集合 $A=\{x\mid 2x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid 6x^2+(2-p)x+5+q=0\}$，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$．

四、命题的形式及等价关系

【知识梳理】

1．命题是表示判断的称述句，由条件和结论两部分组成。

2．真命题、假命题：

命题无论真假都要证明，证明方法比如：直接法、间接法；

举反例不仅是证明假命题的一种重要方法，而且是一种重要的数学思想方法。

3．推出关系：若事件 α 成立可推出事件 β 成立，则称由 α 推出 β。记为 $\alpha\Rightarrow\beta$。

换言之，$\alpha\Rightarrow\beta$ 表示以 α 为条件，β 为结论的命题是真命题的推出关系。

4. 等价性：若 $\alpha\Rightarrow\beta$，且 $\beta\Rightarrow\alpha$，则 α 与 β 等价。记为 $\alpha\Leftrightarrow\beta$。

5. 传递性；

（1） 若 $\alpha\Rightarrow\beta$，$\beta\Rightarrow\gamma$，则 $\alpha\Rightarrow\gamma$；

（2） 若 $\alpha\Leftrightarrow\beta$，$\beta\Leftrightarrow\gamma$，则 $\alpha\Leftrightarrow\gamma$；

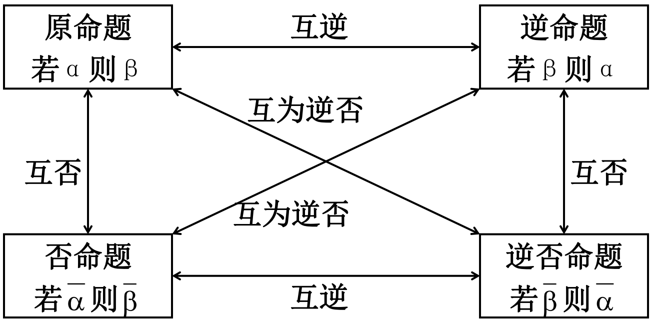
（3） 若 $\alpha\Rightarrow\alpha_1$，$\alpha_1\Rightarrow\alpha_2$，$\cdots,\alpha_n\Rightarrow\beta$，则 $\alpha\Rightarrow\beta$。

6. 四种命题形式：

（1）两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，且第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互为**逆命题**。如果其中一个叫做**原命题**，那么另一个命题就叫做原命题的**逆命题**。

（2）如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定，那么这两个命题叫做互否命题。如果其中一个叫做**原命题**，那么另一个命题就叫做原命题的**否命题**。

（3）一个命题的条件与结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，这样的两个命题，叫做互为**逆否命题**，其中的一个命题叫做**原命题**，则另一个命题就叫做原命题的**逆否命题**。



（4）如果 A、B 是两个命题，A$\Rightarrow$B 且 B$\Rightarrow$A，那么 A、B 叫做**等价命题**。

原命题和逆否命题是等价命题；逆命题和否命题也是等价命题。

7. 当证明原命题有困难的时候，就可以去证明其逆否命题。

从命题结论的反面出发，引出矛盾，从而证明原命题成立，这样的证明方法叫做**反证法**。

反证法证题的步骤：

(1)假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

(2)从假设出发，经过推理，得出矛盾；

(3)由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

【例题解析】

例 1、判断下列语句是否为命题？若是，则判断其真假；若不是，则说明理由。

（1）“若 $x^2=1$，则 $x=1$，或 $x=-1$”；

（2）“若 $x>3$，则 $x>\pi$”；

（3）“x 是有理数”；

（4）“若一个整数的各位数字之和能被 3 整除，则此整数能被 3 整除”；

（5）“若在两个四边形中四条对应边均相等，则两个四边形全等”；

（6）“若 m、$n\in Z$，则 $m+n\in Z$ 吗？”；

例 2、同住一间寝室的四名女生，她们当中有一人在修指甲，一人在看书，一人在梳头，另一人在听音乐. ①A 不在修指甲，也不在看书；②B 不在听音乐，也不在修指甲；③如果 A 不在听音乐，那么 C 不在修指甲；④D 既不在看书，也不在修指甲；⑤C 不在看书，也不在听音乐.

若上面的命题都是真命题，问她们各在做什么？

A 在______________；B 在______________；C 在______________；D 在______________.

例 3、有三个箱子分别涂上红、黄、蓝三种颜色，一个苹果放入其中某个箱子内，且（1）红箱盖上写着："苹果在这个箱子里"；（2） 黄箱盖上写着："苹果不在这个箱子里"；（3）蓝箱盖上写着："苹果不在红箱子里"。已知（1），（2），（3）中只有一句是真的，问苹果在哪个箱子里？

例 4、把下列命题写成"若 p 则 q"的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题：

（1）对顶角 α、β 相等；

（2）负数的立方根是负数；

（3）各位数字之和是 3 的倍数的整数是 3 的倍数；

（4）无理数 a、b 之和是无理数。

例 5、用反证法证明：圆的两条不是直径的相交弦不能互相平分。

例 6、求证：$\sqrt{2}$ 是无理数。

【基础练习】

1． 命题“$|x|+|y|=0 \Rightarrow x=0且y=0$”的逆命题是________；否命题是______；逆否命题是。

2．命题“若$A \subseteq B$,则$A \cap B = A$”的逆命题是_______；否命题是____；逆否命题是________。

3． 已知一个命题的否命题是“a，b为整数，如果a，b都是偶数，那么$a+b$为偶数”，试写出原命题的逆命题：________________________________，该逆命题是___命题。

4． 命题“ΔABC是直角三角形”与命题“ΔABC中$AB^2 = AC^2 + BC^2$”是 _______命题。

5．“$a \notin A或b \notin B$”的否定形式是 （ ）

（A）若$a \notin A$,则$b \notin B$。（B）$a \in A或b \in B$。（C）$a \in A且b \in B$。（D）若$b \notin B$，则$a \notin A$。

6． 命题“若$x \neq 3且x \neq 2$,则$x^2-5x+6 \neq 0$”的逆否命题是 （ ）

（A）若$x^2-5x+6=0$，则$x=3且x=2$。 （B）若$x^2-5x+6=0$，则$x=3或x=2$。

（C）若$x^2-5x+6 \neq 0$，则$x=3且x=2$。 （D）若$x^2-5x+6 \neq 0$，则$x=3或x=2$。

7． 若命题p的逆命题是q，命题p的否命题是r，则命题q是命题r的 （ ）

（A）逆命题。 （B）否命题。 （C）逆否命题。 （D）以上都不正确。

8． 关于命题“平行四边形的两组对边分别相等”，下列论述正确的是 （ ）

（A）逆命题是假命题。 （B）否命题是假命题。

（C）逆否命题是真命题。 （D）以上都不正确。

9． 命题“若$a>b$，则$ac>bc$”（a,b,c都是实数）与它的逆命题、否命题和逆否命题中，真命题的个数为 （ ）

（A）4。 （B）3。 （C）2。 （D）0。

10．将命题“到圆心距离等于半径的直线是圆的切线”改写成“若…，则…”的形式，并分别写出它的逆命题、否命题、逆否命题，再判断它们的真假。

六、不等式的基本性质

【知识梳理】

1. 不等式公理

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的。在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

在右图中，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 a＞b。

而 a－b 表示 a 减去 b 所得的差，由于 a＞b，则差是一个正数，即 a－b＞0。

命题：“若 a＞b，则 a－b＞0”成立；逆命题“若 a－b＞0，则 a＞b”也正确。

类似地：若 a＜b，则 a－b＜0；若 a＝b，则 a－b＝0。逆命题也都正确。

结论：(1)“a＞b”⇔“a－b＞0”

(2)“a＝b”⇔“a－b＝0”

(3)“a＜b”⇔“a－b＜0”——以上三条即为比较大小的依据：“作差比较法”。

正负数运算性质：

(1) 正数加正数是正数；(2) 正数乘正数是正数；

(3) 正数乘负数是负数；(4) 负数乘负数是正数。

2. 不等式的基本性质

(1)如果$a>b$，那么$b<a$，如果$b<a$，那么$a>b$．（对称性）

(2)如果$a>b$，且$b>c$，那么$a>c$．(传递性)

(3)如果$a>b$，那么$a+c>b+c$． 即$a>b\Rightarrow a+c>b+c$。

(4)如果$a>b$，且$c>d$，那么$a+c>b+d$．(相加法则)

(5)如果$a>b$，且$c>0$，那么$ac>bc$； 如果$a>b$，且$c<0$，那么$ac<bc$

(6)如果$a>b>0$，且$c>d>0$，那么$ac>bd$．(相乘法则)

(7)若$a>b>0$,则$a^n>b^n$($n\in N$且$n>1$)

(8)若$a>b>0$,则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in N$且$n>1$)

3. 两个实数的比较大小的方法：

(1) 作差比较法， $a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$。

主要步骤：作差——变形（化简，配方，因式分解）——判断正负——得出结论。

(2) 作商比较法， $a>b>0\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$；$a=b>0\Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$；$0<a<b\Leftrightarrow \frac{a}{b}<1$。

【例题解析】

例 1. 若$a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

例 2. 判断下列命题是否正确，并说明理由

（1）若$ac^2>bc^2$，则$a>b.$　　（2）若$a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$

（3）若$a<b,c<0$，则$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}.$　　（4）若$a>b,c>d$，则$a-c>b-d.$

（5）若$a>b>0,a>c$，则$a^2>bc.$　　（6）若$a>b,m\in N^*$，则$a^m>b^m.$

（7）若$a,b\in R,a>|b|$，那么$a^n>b^n$．　（8）若$a,b\in R,a<b<1$，那么$\sqrt{1-a}>\sqrt{1-b}$

例 3. 若$a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，求证：$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$

例 4. 已知①$-1\le a+b\le 1$；②$1\le a-b\le 3$，求：$3a-b$的取值范围.

例 5. 已知三个不等式：①$ab>0$；②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；③$bc>ad$。以其中两个作条件，余下一个作结论，则可组成__________个正确命题。

例 6. 比较x^6+1与x^4+x^2的大小，其中$x\in R$

例 7. 解关于 x 的不等式 m(x＋2)＞x＋m。

【基础练习】

1. 已知非零实数a,b满足$a>b$，则下列不等式成立的是（　　）

A）$a^2>b^2$　　B）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C）$a^2b>ab^2$　　D）$\frac{a}{b^2}>\frac{b}{a^2}$

2. 已知$a,b,c,d\in R$,则下列选项正确的是（　　）

A. $a>b \Rightarrow am^2>bm^2$　　B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c} \Rightarrow a>b$

C. $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$　　D. $a>b \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

3. 下面四个条件中，使 $a>b$ 成立的充分而不必要的条件是（　　）

A.$a>b+1$　　B.$a>b-1$　　C.$a^2>b^2$　　D.$a^3>b^3$

4. 若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下面各式中恒成立的是（　　）.

（A）$-2<\alpha-\beta<0$　（B）$-2<\alpha-\beta<-1$　（C）$-1<\alpha-\beta<0$　（D）$-1<\alpha-\beta<1$

5. 实数 a、b、c、d 满足条件：①$a<b, c<d$；②$(a-c)(b-c)>0$；③$(a-d)(b-d)<0$，则有(　　)

A. $a<c<d<b$　　B. $c<a<b<d$　　C. $a<c<b<d$　　D. $c<a<d<b$

6. 已知 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中一定成立的是(　　)

A．$ab>ac$　　B．$c(b-a)<0$　　C．$cb^2<ab^2$　　D．$ac(a-c)>0$

7. 对于实数 a,b,c 中，给出下列命题：

①若$a>b$,则$ac^2>bc^2$；　　②若$ac^2>bc^2$,则$a>b$；

③若$a<b<0$,则$a^2>ab>b^2$；　　④若$a<b<0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

⑤若$a<b<0$,则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$；　　⑥若$a<b<0$,则$|a|>|b|$；

⑦若$c>a>b>0$,则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$；　　⑧若$a>b, \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0, b<0$。

其中正确的命题是__________

8. 当 $a>0>b$，$c<d<0$ 时，给出以下三个结论：①$ad<bc$；②$a+c^2>b+d^2$；③$b-c>d-c$.其中正确命题的序号是____________________

9. 已知 1≤x+y≤5，-1≤x-y≤3，则 2x-3y 的取值范围是__________

10. 解关于 x 的不等式：$(m^2-4)x<m+2$

11. 已知 $a+b>0$，试比较$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$与$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

【拓展练习】

12. 设互不相等的正数a,b,c满足$a^2+c^2=2bc$，则下列不等式中可能成立的是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

13. 如果$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则$2\alpha-\beta$的取值范围是________

14. 已知$a>b>c$，且$a+b+c=0$, 则$\frac{c}{a}$的取值范围是________

七、一元二次不等式的解法

【知识梳理】

1. 一元二次不等式的定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式。

比如：$x^2-5x<0$.

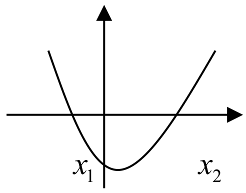
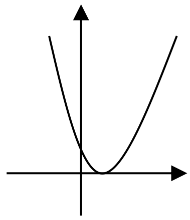
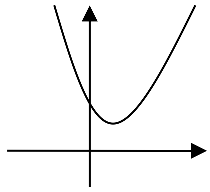
任意的一元二次不等式，总可以化为一般形式：$ax^2+bx+c>0\left(a>0\right)$或$ax^2+bx+c<0\left(a>0\right)$

2. 一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式$ax^2+bx+c>0\left(a<0\right)\left(a>0\right)$的解集可以联系二次函数$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$的图像，图像在$x$轴上方部分对应的横坐标$x$值的集合为不等式$ax^2+bx+c>0$的解集，图像在$x$轴下方部分对应的横坐标$x$值的集合为不等式$ax^2+bx+c<0$的解集.

设一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的两根为$x_1$、$x_2$且$x_1\leq x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则相应的不等式的解集的各种情况如下表：

三个两次（一元二次方程、一元二次不等式、二次函数）之间的关系

Δ 三个二次	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$图像			
$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$根	$x=x_1$或$x=x_2$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无 解
$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$解集	$\{x\|x<x_1$或$x>x_2\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq0\ (a>0)$解集	$\{x\|x\leq x_1$或$x\geq x_2\}$	R	R
$ax^2+bx+c\leq0\ (a>0)$解集	$\{x\|x_1\leq x\leq x_2\}$	$\left\{x\middle\|x=-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

注意：

（1）一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根x_1、x_2是相应的不等式的解集的端点的取值，是抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴的交点的横坐标；

（2）表中不等式的二次系数均为正，如果不等式的二次项系数为负，应先利用不等式的性质转化为二次项系数为正的形式，然后讨论解决；

（3）解集分$\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$三种情况，得到一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$与$ax^2+bx+c<0$的解集。

3. 区间的表示

设a,b均为实数，且$a<b$

①其中，a，b 叫做相应区间的＿端点＿＿＿＿。

②符号“∞”读作＿＿无穷大＿＿＿，“＋∞”读作＿＿正无穷大＿＿，“－∞”读作＿＿负无穷大＿。

4. 解一元二次不等式的步骤

（1）先看二次项系数是否为正，若为负，则将二次项系数化为正数；

（2）写出相应的方程$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$，计算判别式Δ：

①$\Delta>0$时，求出两根x_1、x_2，且$x_1<x_2$（注意灵活运用因式分解和配方法）；

② $\Delta=0$时，求根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；③ $\Delta<0$时，方程无解

（3）根据不等式，写出解集.

【例题解析】

一元二次不等式的解法

例 1. 解下列一元二次不等式

(1) $2x^2-3x-2>0$ (2) $-3x^2+6x-2>0$ (3) $4x^2-4x+1\le 0$

(4) $-x^2+4x-5>0$ (5) $-x^2+2x-3>0$

例 2. 解不等式：$-6\le x^2-x-6<6$

含参数的一元二次不等式的解法

例 3. 不等式$x^2+mx-n<0$的解集为$x\in(4,5)$，求关于x的不等式$nx^2+mx-1>0$的解集

例 4. 若关于x的不等式$mx^2-(2m+1)x+m-1\ge 0$的解集为空集，求m的取值范围.

例 5. 解关于 x 的不等式 $x^2-(1+a)x+a<0$（a 为常数）.

一元二次不等式恒成立问题

例 6. 已知关于 x 的不等式$(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3>0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围。

【基础练习】

1. 已知集合 $P=\{x|\frac{x+1}{x-1}>0\}$，集合 $Q=\{x|x^2+x-2\geq0\}$，则 $x\in Q$ 是 $x\in P$ 的(　　)

A．充分条件但不是必要条件　B．必要条件但不是充分条件　C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

2. 集合 $M=\{x|x^2-2008x-2009>0\}$，$N=\{x|x^2+ax+b\leq0\}$，若 $M\cup N=\mathbf{R}$，$M\cap N=(2009,2010]$，则(　　)

A．$a=2\,009$，$b=-2\,010$　　B．$a=-2\,009$，$b=2\,010$

C．$a=2\,009$，$b=2\,010$　　D．$a=-2\,009$，$b=-2\,010$

3. 求下列不等式的解集

（1）$x^2>x$ 的解集是__________

（2）$3x^2-2x+1<0$ 的解集是__________

（3）$-2x^2-5x+3>0$ 的解集是____________

（4）$-1\leq x^2+2x-1\leq2$ 的解集是__________

4. 不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$，对一切 $x\in R$ 恒成立，则 a 的取值范围__________.

5. 不等式 $ax^2+4x+a>1-2x^2$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

6. 若关于 x 的不等式 $mx^2-(2m+1)x+m-1\geq0$ 的解为一切实数，则 m 的取值范围是________.

7. 若关于 x 的不等式 $mx^2-(2m+1)x+m-1\geq0$ 的解集为非空集，则 m 的取值范围是________.

8. 已知关于 x 不等式 $2x^2+bx-c>0$ 的解为 $x<-1$，或 $x>3$．试解关于 x 的不等式 $bx^2+cx+4\geq0$．

9. 解关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$.

10. 已知方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根为$-\frac{1}{2}$和 2.

(1)求 a、b 的值；　　　(2)解不等式 $ax^2+bx-1>0$.

11. 解关于 x 的不等式$\frac{x-a}{x-a^2}<0$ ($a\in\mathbf{R}$).

12. 解关于 x 的不等式：$ax^2-2\left(a+1\right)x+4>0$

【拓展练习】

13. 若关于 x 的不等式$\frac{ax}{x-1}<1$ 的解集是$\{x|x<1$ 或 $x>2\}$，则实数 $a=$________.

14. 求不等式 $12x^2-ax>a^2(a\in\mathbf{R})$的解集.

15. 已知二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a,b,c\in R\right)$满足：对任意实数 x，都有 $f\left(x\right)\geq x$，且当 $x\in\left(1,3\right)$时，有 $f\left(x\right)\leq\frac{1}{8}\left(x+2\right)^2$ 成立；

（1）证明：$f\left(2\right)=2$；　　　（2）若 $f\left(-2\right)=0$，求 $f\left(x\right)$的表达式；

八、一元二次不等式的应用

【知识梳理】

1.一元二次方程根的分布

(1)二次方程有且只有一个实根在区间(m,n)内的充要条件

若 m,n 都不是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根，记 $f(x)=ax^2+bx+c$，则方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根在范围(m,n)的充要条件是 $f(m)\cdot f(n)<0$.

(2)二次方程两个实根都在区间(m,n)内的充要条件

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实根都在区间(m,n)内，则二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有两个交点或相切于 x 轴，且两个交点或切点的横坐标都大于 m 小于 n，由此方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 两个实根都在区间(m,n)的充要条件是

$$\begin{cases} af(m)>0, \\ af(n)>0, \\ \Delta=b^2-4ac\geq 0, \\ m<-\dfrac{b}{2a}<n \end{cases}$$

(3)二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根分别在区间(m,n)外(即一根小于 m,另一根大于 n)的充要条件是 $\begin{cases} af(m)<0, \\ af(n)<0 \end{cases}$

(4)二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根都比 n 大的条件是 $\begin{cases} af(n)>0, \\ -\dfrac{b}{2a}>n, \\ \Delta=b^2-4ac\geq 0 \end{cases}$

(5)二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根都比 m 小的条件是 $\begin{cases} af(m)>0, \\ -\dfrac{b}{2a}<m, \\ \Delta=b^2-4ac\geq 0 \end{cases}$

(6)方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根，一个大于 k 一个小于 k 的充要条件是 $f(k)<0$.

2.一元二次不等式的实际应用

(1)阅读理解材料：将实际问题抽象成数学模型，领悟问题的实际背景.

(2)建立数学模型：用符号语言、图形语言等抽象成数学模型，建立所得模型和已掌握模型对应关系.

(3)讨论不等关系：根据数学模型和题目要求，讨论与结论有关的不等关系，得到理论参数值.

(4)作出问题结论：结合题目要求作出问题的结论.

【例题解析】

不等式恒成立问题

例 1. 若函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+6ax+a+8}$ 的定义域是 R，求实数 a 的取值范围.

例 2. 关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2-(a+2)x+1\geq 0$ 对一切实数 x 都成立，求实数 a 的取值范围.

不等式与集合的综合

例 3. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-(2a+1)x+(a^2+a-2)>0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-(a^2+a)x+a^3<0\}$

（1）若 $A\bigcap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在实数 a，使 $A\bigcup B=R$ 成立，如果存在求出 a 的取值范围；如果不存在，请说明理由.

例 4. 设集合 $A=\{x\,|\,2x^2+(a+1)x-a(a-1)<0\}$，如果 $(0,1)\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

一元二次方程根的分布

例 5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(p+4)x+(p+7)=0$，根据下列条件确定实数 p 的取值范围

(1)两根都大于 2；
(2)一根大于 3，另一根小于 3；
(3)一根比 2 小，一根比 3 大；
(4)两根均在区间(2,5)内；
(5)一根在区间(2,3)内，另一根在区间(3,5)内.

不等式的应用

例 6. 某杂志以每本 2 元的价格可发行 10 万册，若单价每提高 0.2 元，发行量就减少 5000 本，要使销售收入不低于 22.4 万元，则杂志最高定价可以是多少元.

【基础练习】

1. 关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解集为 $(-1,\frac{1}{3})$，则 $ab=$____________.

2. 不等式 $(m-2)x^2+2(m-2)x-4<0$ 对一切实数 x 都成立，则实数 m 的取值范围____________.

3. 设 $A=[-2,4)$，$B=\{x\,|\,x^2-ax-4\le 0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围____________.

4. 方程 $x^2+(3m-1)x+(3m-2)=0$ 的两个根都属于(-3,3)，且其中至少有一个根小于 1，则 m 取值范围_______.

5. 已知方程 $4x^2+2(m-1)x+(2m+3)=0(m\in R)$ 有两个负根，则 m 的取值范围____________.

6. 对任意 $a\in[-1，1]$不等式 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立，则实数 x 的取值范围____________.

7. 方程 $x^2+2(m-1)x+2m+6=0$ 有两个实根，且一个比 2 大，一个比 2 小，则实数 x 的取值范围_______.

8. 方程 $x^2+2mx+2m+1=0$，其中一根在区间(－1，0)内，另一根在区间(1，2)内，则 m 的取值范围______.

9. 方程 $(3m-1)x^2+(2m+3)x-m+4=0$ 有且只有一个实根属于(-1, 1)，则 m 的取值范围______.

10. 方程 $4x^2-4(a+1)x+3(a+1)=0$ 有两个均小于 2 的不同的实数根，则实数 a 的取值范围______.

11. 若关于 x 的方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的两根，一个小于 0 一个大于 1，求实数 m 的取值范围.

12. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3\le 0\},B=\{x\,|\,x^2-2mx+m^2-4\le 0\}$

(1)若 $A\bigcap B=[0,3]$，求实数 m 的值；(2)若 $A\subseteq C_R B$，求实数 m 的取值范围.

13. 已知某种酒每瓶售价 70 元，不收附加税时每年产销 100 万瓶，若征收附加税，每销售 100 元要征 r 元，称作税率为 r%，则每年产销量将减少 10r 万瓶，如果要使每年在此项经营中所收取的附加税不少于 112 万元，r 的取值范围是多少.

14.汽车从刹车到停车所滑行的距离 s(米)与速度 v(米/秒)的平方与汽车总质量 m(千克)的乘积成正比。设某卡车不装货物时以 50km/h 行驶，从刹车到停车滑行了 20m，如果这辆卡车装载了与车身等重的货物行驶，并与前车距离为 15m，假定卡车司机发现前车到刹车的反应时间为 1s，为保证不相撞，最大限速是多少.

九、其他不等式的解法

【知识梳理】

1. 分式不等式：形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$或$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$(其中$f(x)$、$g(x)$为整式且$g(x)\neq 0$)的不等式称为分式不等式。

2. 同解原理：(1)如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做同解不等式，一个不等式变形为另一个不等式时，如果两个不等式是同解不等式，这种变形叫做不等式的同解变形.

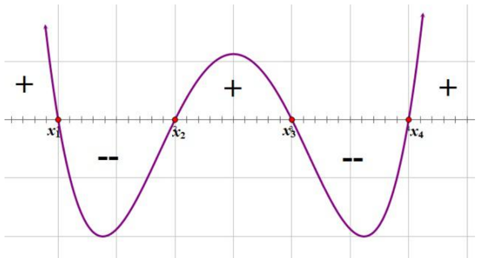
(2)解分式不等式的关键是将它变形为同解不等式

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$；$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0(\leq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geq 0(\leq 0),\\ g(x)\neq 0\end{cases}$.

3.高次不等式：(1)只含有一个未知数，并且未知数的最高次数大于 2 的整式不等式称为高次不等式.

(2)解形如$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)>0(<0)$的高次不等式，

令$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$，其中$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，显然当$x>a_n$时，$f(x)>0$；当$x\in(a_{n-1},a_n)$时，$f(x)<0$；当$x\in(a_{n-2},a_{n-1})$时，$f(x)>0$；……：由此可得$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)>0(<0)$的解集.



(3)上述过程在数轴上形象地表示出来，称为数轴标根法.

(4)步骤归纳

①将不等式化为$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)>0(<0)$形式，使各因式 x 的最高次项系数为正.

②求根，并在数轴上表示出来

③由右上方穿线，经过数轴上表示各根的点，看图像写出解集，注意奇次根穿透，偶次根不穿透.

4.绝对值不等式

(1)绝对值：一个数在数轴上所对应的点到原点的距离.

①代数意义：$|a|=\begin{cases}a, a>0,\\ 0, a=0,\\ -a, a<0\end{cases}$

②几何意义：$|a|$表示实数 a 所对应的点到原点的距离，进一步地，$|a-b|$表示实数 a 所对应的点到 b 对应的点的距离.

(2)同解不等式：

①当实数$a>0$时，$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a, |x|>a \Leftrightarrow x<-a$或$x>a$.

② $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$ ， $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$.

③$|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

【例题解析】

例 1. 解下列分式不等式

(1) $\dfrac{2x+1}{x-2} \geq 4$ (2) $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3} \leq 2$

含参数方程的不等式

例 2. 当 m 为何实数时，关于 x 的方程$m(x-3)=3(x+1)$的解 （1）为正数；（2）在[1,2)范围内.

例 3. 当实数$a \neq 0$时，解关于 x 的不等式$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1$.

高次方程

例 4. 解下列高次方程

(1) $(1-x)(x+1)(x-2)>0$　　(2) $(x+2)^2(x-1)^3(x+1)(x-2)<0$

例 5. 解下列绝对值不等式(定义法)

(1) $3\le|2x-1|<7$　　(2) $|x^2-2x|<\frac{1}{2}x$

例 6. 解下列绝对值不等式(零点分段法)

$|x+2|+|x-1|<4$

例 7. 解下列绝对值不等式(两边平方法)

$|3x-1|\le|x+2|$

恒成立问题

例 8. 若对 $x\in R$，恒有 $\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>m$，其中 $m\in N^*$，求 m 的值

【基础练习】

1. $\left|\dfrac{x+3}{2x-1}\right|\geq 1$的解集是__________.

2. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$的解集是__________.

3. $\dfrac{2x+1}{x-3}>\dfrac{2x+1}{3x-2}$的解集是__________.

4. $x\geq\dfrac{1}{x}$的解集是__________.

5. $|x^2-5x+5|\leq 1$的解集是__________.

6. $5|x+2|>3x+14$的解集是__________.

7. $\dfrac{x(x+1)^2(x-2)}{(x-3)^3(x-5)}\leq 0$的解集是__________.

8. 不等式$\left|x-1\right|+\left|x+2\right|<5$的解集是__________.

9. 若$\dfrac{x^2-(a+a^2)x+a^3}{x^2+4x+3}<0$的解集是$\left\{x\middle|-1<x<9\right\}$，则实数$a$的值是__________.

10. 当实数 a 为何值时，$-3<\dfrac{3x^2+ax+6}{x^2-x+1}\leq 6$恒成立，则实数$a$的取值范围是__________.

11. 设集合$A=\left\{x\middle||x-a|<2\right\}$，$B=\left\{x\middle|\dfrac{2x-1}{x+2}\leq 1\right\}$，若$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是__________.

12. $x^2-2|x|-15>0$的解集是__________.

13. 设集合$A=\{x||x-\dfrac{1}{2}(a+1)^2|\leq\dfrac{1}{2}(a-1)^2\}$,$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0\}$，若果$A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是__________.

14. 关于 x 的不等式$|\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}|<3$的解集为 R，则实数 k 的取值范围是__________.

15. 解不等式$\dfrac{x-a}{x-a^2}<0\ (a\in R)$

【拓展练习】

16. 已知不等式$\left|x-a\right|<b$的解集为$(-1,2)$，求 a,b 的值.

17. 已知不等式$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}\geq 0$的解集为$[-1,2]\cup(3,+\infty)$，求不等式$\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)}\leq 0$的解集.

18. 若$\dfrac{x^2-(a+a^2)x+a^3}{x^2+4x+3}<0$的解集是$\left\{x\middle|-1<x<9\right\}$，求实数$a$的值.

十、 基本不等式

【知识梳理】

1.基本不等式

(1)基本不等式 1：对任意$a,b\in R$，那么$a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当$a=b$时等号成立.

(2)基本不等式 2：如果$a>0,b>0$，那么$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时等号成立.

(3)代数意义：把$\dfrac{a+b}{2}$和$\sqrt{ab}$分别叫做正数a,b的算术平均数和几何平均数，也就是说，两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

(4)几何意义：以线段 a、b 之和为直径的半圆中，半径 OD 的长度不小于垂线段 CD 的长度.

2.基本不等式求最值的归纳

(1)当两个正数的积为定值时，它们的和有最小值，即若$a,b\in R^{+}$，且$ab=P$为定值，则$a+b\geq 2\sqrt{P}$，当且仅当$a=b=\sqrt{P}$时等号成立.

(2)当两个正数的和为定值时，它们的积有最大值，即若$a,b\in R^{+}$，且$a+b=M$为定值，则$ab\leq\frac{M^{2}}{4}$，当且仅当$a=b=\frac{M}{2}$时等号成立.

3.基本不等式的推广

(1)基本不等式推广 1：对任意$a,b,c\in R^{+}$，有$a^{3}+b^{3}+c^{3}\geq 3abc$，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

(2)基本不等式推广 2：对任意$a,b,c\in R^{+}$，有$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

(3)基本不等式推广 3：如果$a_{i}\in R^{+},i=1,2,3,\cdots,n$，有$\frac{a_{1}+a_{2}+a_{3}+\cdots+a_{n}}{n}\geq\sqrt[n]{a_{1}a_{2}a_{3}\cdots a_{n}},n\in N^{*}$，当且仅当$a_{1}=a_{2}=a_{3}=\cdots=a_{n}$时等号成立.

(4)二元均值不等式：若$a,b\in R^{+}$，则

$$\min(a,b)\leq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}\leq\max(a,b)$$

(5)三元均值不等式：若$a,b,c\in R^{+}$，则$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{2}}$

【例题解析】

利用基本不等式求函数最值的简单运用

例 1. (1)当$x>0$时，求$2x+\frac{1}{x}$的最小值.

(2)当$x<0$时，求$2x+\frac{1}{x}$的最大值.

(3)当$x\neq 0$时，求$2x+\frac{1}{x}$的取值范围.

例 2. 当 $0<x<1$ 时，求 $x(1-x)$ 的最大值.

例 3. 当 $x>1$ 时，求 $x+\dfrac{1}{x-1}$ 的取值范围.

例 4. 设 $x\in R$，求 $x^2+\dfrac{9}{x^2+4}$ 的取值范围.

例 5. 当 $x>2$ 时，求 $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ 的取值范围.

其他形式的最值问题

例 6. 设 $x,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

例 7. 求函数 $x^2(2-5x)$ 在 $(0,\dfrac{2}{5})$ 上的最大值.

基本不等式在一些简单问题中的应用

例 8. 一段长为 36m 的篱笆围成一个一边靠墙(足够长)的矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少.

【基础练习】

1. 当$x>\frac{1}{2}$时，$x+\frac{1}{2x-1}$的最小值是______________.

2. 设$x\in R$，$x^2+\frac{25}{x^2+4}$的最小值是______________.

3. $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$的最小值是______________.

4. 当$a>3$时，求$a+\frac{4}{a-3}$最小值是______________.

5. 已知$a,b\in R^+$且$a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$最小值是______________.

6. 当$0<x<\frac{7}{3}$时，求$x(7-3x)$的最大值是______________.

7. 当$x<\frac{5}{4}$时，求$4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值是______________.

8. 设$x,y>0$，且$x+y=1$，求$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$的最小值是______________.

9. 已知$x,y>0$，满足$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，求$xy$的最大值是______________.

10. 已知$x,y>0$，满足$xy=x+y+3$，求xy的最小值是______________.

11. 求$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}(\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2})$的取值范围是______________.

12. 设$x>0$，求函数$y=1+x+\frac{4}{x^2}$的最小值是______________.

13. 直角三角形中，（1）已知$a+b=1$，求证$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$；（2）已知斜边长为 c，两条直角边长为 a 和 b，求证$c<a+b\le\sqrt{2}c$；（3）已知周长为 C，求这个直角三角形面积的最大值.

十一、不等式的证明

【知识梳理】

证明不等式的基本方法

1.比较法：作差法(与 0 比较)、作商法(与 1 比较). 其中，作差法更加常用.

2.综合法：已知出发，借助不等式的性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证不等式.

3.分析法：从需证的不等式出发，分析这个不等式成立的充分条件，转化为判定那些条件是否具备. 使用分析法时，需注意书写格式.

4.反证法：否定结论，导出矛盾，从而说明原结论正确. 一般情况下，不方便直接证明的命题，可以用反证法进行证明，如“$\sqrt{2}$为无理数”.

5.放缩法：舍去或添加一些项，使不等式一边放大或缩小，依据不等式的传递性，达到证题的目的.

【例题解析】

证明下列不等式

1. (比较法)当$a,b\in R^{+}$时，证明$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq a+b$.

2.(比较法)已知$a,b,c\in R$，求证$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

3.(分析法)当$a,b\in R^{+}$时，求证$\sqrt{(a+1)(b+1)}\geq\sqrt{ab}+1$.

4.(综合法)设 $a,b,c\in R^{+}$，且 $a+b+c=1$，求证 $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geq 8$.

5.(反证法)已知 $a,b,c\in(0,1)$，求证 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 中至少有一个不大于 $\frac{1}{4}$.

6.(放缩法)设 $x,y,z>0$，求证 $\sqrt{x^{2}+xy+y^{2}}+\sqrt{y^{2}+yz+z^{2}}>x+y+z$

7.(柯西不等式)设 $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$，

求证 $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)$，并指出等号成立条件.

【基础练习】

1.已知 $a,b\in R^{+},n\in N^{*}$ 且 $n\geq 2$，证明 $a^{n}+b^{n}\geq a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

2.已知 $x,y\in R^{+}$，求证 $(x+y)(x^{2}+y^{2})(x^{3}+y^{3})\geq 8x^{3}y^{3}$.

3.已知$a,b,c\in R^{+}$，求证$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c)$.

4. 已知$n\in N^{*}$，求证：$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$.

5.已知$a,b\in R^{+},a+b=1$，求证$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leq 2$.

6.已知$a\in R$，求证$3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$

7.设$\triangle ABC$的三边为a、b、c，求证$4(ab+bc+ca)>(a+b+c)^2$.

8.已知正数x,y满足$x+y=1$，求证$(x+\frac{1}{x})\cdot(y+\frac{1}{y})\geq\frac{25}{4}$.

9.若 $a,b,c\in(0,2)$，则 $a(2-b),b(2-c),c(2-a)$ 不可能都大于 1.

10.若 $a,b>0,a+b=1$，求证 $\frac{4}{3}\le\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}<\frac{3}{2}$.

十二、函数的概念

【知识梳理】

1. 函数的定义:

一般地, 设 A、B 是两个非空数集, 如果按某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任意一个元素 x , 在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与它对应, 这样的对应叫做从 A 到 B 的一个函数 ($functin$), 通常记为: $y=f(x)$, $x\in A$. 其中, x 叫自变量, 所有 x 组成的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域. y 叫因变量, 所有 x 对应的函数值 y 组成的集合 C 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域.

2. 函数的三要素:

(1)定义域　　(2)对应法则　　(3)值域

对一个函数来讲，其定义域是基础，对应法则是核心，值域是结果. 所以，函数的本质实际上是由定义域和对应法则完全决定的.

3. 两个函数相等：定义域和对应法则分别对应相同的两个函数才是相等的函数.

4. 函数的表示方法主要有:

(1)解析法　　(2)图像法　　(3)列表法

【例题解析】

（一）函数的定义域

例 1、求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+4}}$　　(2) $y=\sqrt{-x^2+x+2}$　　(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{|x|-1}$

（二）函数值

例 2、已知 $f(x)=x^2+1$，求 $f(1)$， $f(x+1)$.

（三）函数的解析式

例 3、(1)已知 $f(2x-1)=3x-2$，求 $f(x)$.

(2)　已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

(3)　若函数 $f(x)$ 的定义域为非零实数，且 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x$，求 $f(x)$.

（四）函数的概念

例 4、 某校有一个班级，设变量x是该班同学的姓名，变量y是该班同学的学号，变量z是该班同学的身高，变量w是该班同学某一门课程的考试成绩．则下列选项中正确的是（　　）.

A. y是x的函数　　B. z是y的函数　　C. w是z的函数　　D. w是x的函数

例 5、已知函数$y=f\left(x\right)$的定义域为D，且集合$A=\left\{\left(x,y\right)|\,y=f\left(x\right),x\in D\right\}$，$B=\left\{\left(x,y\right)|\,x=a\right\}$，则$A\cap B$的元素个数为____________.

例 6、把函数$y=\dfrac{1}{x}\left(x>0\right)$的图像以原点为中心，逆时针旋转$45^{\circ},90^{\circ},135^{\circ},180^{\circ}$，$225^{\circ},270^{\circ},315^{\circ},360^{\circ}$，可以得到 8 个图像．在这 8 个图像中，不是函数的有________个.

（五）抽象函数的定义域

例 7、(1)已知函数$y=f(x)$的定义域为$[3,8]$，求函数$y=f(x^2-1)$的定义域.

(2) 已知函数$y=f(x+1)$的定义域为$(-1,1)$，求函数$y=f(2x-1)$的定义域.

（六）含字母的问题

例 8、已知函数$y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$的定义域为R，求实数m的取值范围.

【基础练习】

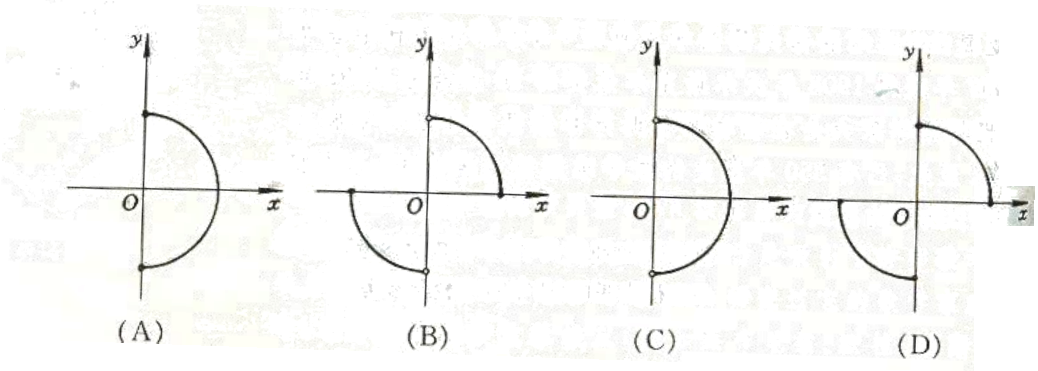
1、如果函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$，那么 $f(x+1)=$______

2、如果函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-1, x>0\\ -2x^2+1, x\le 0\end{cases}$, 那么 $f(0)+f(-1)+f(1)=$______

3、已知一次函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(f\left(x\right)\right)=4x+3$，则 $f\left(x\right)=$______

4、设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\ x^2, -1<x<2\\ 2x, x\ge 2\end{cases}$, 若 $f\left(x\right)=3$, 则 $x=$______

5、下列曲线所确定的 y 与 x 之间的关系是函数关系的是（　　）

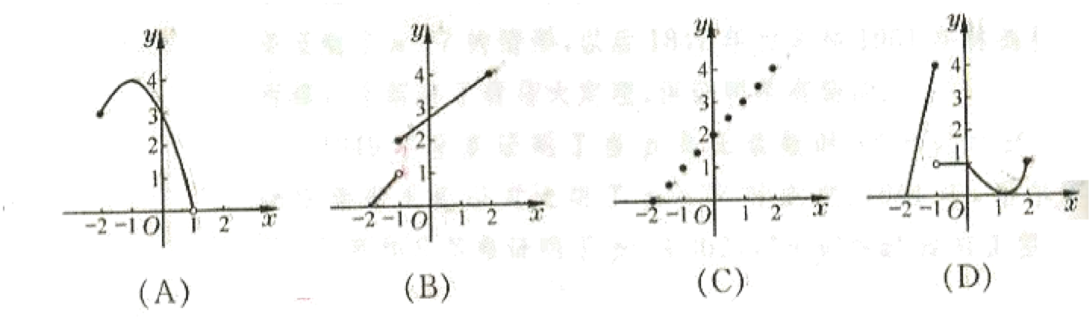


6、下列四组函数中，两个函数表示同一函数的是（　　）

(A) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　(B) $f(x)=1, g(x)=x^0$；

(C) $f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases}x & (x>0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$；　　(D) $f(x)=\sqrt[3]{x^3}, g(t)=t$

7、观察下列四个函数的图像，值域为[0，4]的函数是　　（　）



8、求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x+1)^0}$　　　　(2) $y=\dfrac{(|x|-x)^2}{|x|-x}$

9、已知 $f(x+1)=\dfrac{2x+3}{3x-4}$，求 $f(x)$ 的表达式。

10、已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & (x\le 0) \\ -x^2 & (x>0) \end{cases}$

(1) 求 $f(2)$ 、 $f[f(2)]$ 的值；

(2) 若 $f(a)=-1$，求 a 的值；

(3) 若 $f(a)>-1$，求 a 的取值范围。

十三、函数关系的建立

【知识梳理】

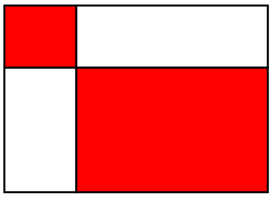
1. 建立函数关系的步骤：

(1)分析题意.(2)列出等量关系.(3)等式变形得出函数解析式.

(4)根据问题的实际意义给出函数的定义域.

【例题解析】

例 1、如图一个边长为 $a,b(a>b)$ 的长方形被平行于边的两条直线所分割，其中长方形的左上角是一个边长为 x 的正方形，试用解析式将图中阴影部分的面积 S 表示成 x 的函数。



例 2、某种商品进货单价为 40 元 ， 若按每个 50 元的价格出售 ， 能卖出 50 个 ， 若销售单价每上涨 1 元 ， 则销售量就减少 1 个 ， 为了获得最大利润 ， 此商品的最佳售价应定为多少元.

例 3、某公司租地建仓库，每月土地占用费 y_1 与车库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费 y_2 与到车站的距离成正比，如果在距车站 10 公里处建仓库，这两项费用 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元，那么要使这两项费用之和最小，仓库应建在离车站多少公里处.

例 4、某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下：

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

若用同一行业中的应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况，则根据表中数据，就业形势一定是（　　）.

A. 计算机行业好于化工行业　　B. 建筑行业好于物流行业

C. 机械行业最紧张　　D. 营销行业比贸易行业紧张

例 5. 某工程队共有 500 人，要建造一段 6000 米的高速公路，工程需要把 500 人分成两组，甲组的任务是完成一段 4000 米的软土地带，乙组的任务是完成剩下的 2000 米的硬土地带，据测算，软、硬土地每米的工程量是 30 工（工为计量单位）和 40 工.

(1)若平均分配两组人数，分别计算两组完工的时间，并求出此时全队的筑路工期；

(2)如何分配两组的人数会使得全队的筑路工期最短？

例 6、根据全国人大常委 2011 年 6 月 30 日决议，将个税起征点提高到 3500 元. 将超额累进税率中第 1 级有 5%降低到 3%. 修改后的个税法于 2011 年 9 月 1 日起施行，下面是修改后的个人所得税税率表：

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 1500 元的	3
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20
4	超过 9000 元至 35000 元的部分	25
5	超过 35000 元至 55000 元的部分	30
6	超过 55000 元至 80000 元的部分	35
7	超过 80000 元的部分	45

（注：本表所称全月应纳税所得额是指依照个税法第六条的规定，以每月收入额减除费用 3500 元后的余额。）

(1)小明的爸爸每月工资为 9000 元，他每月应交纳多少个人所得税？

(2)若小明的爸爸每月交纳个人所得税 m 元 $\left(0<m\leq 400\right)$，则他每月工资为多少元？

【基础练习】

1、建筑一个容积为 8000 m^3，深为 6 m 的长方体蓄水池，池壁的造价为 a 元/m^2,池底的造价为 2a 元/m^2,把总造价 y(元)表示为底的一边长为 x(m)的函数.

2、某机床厂今年年初用 98 万元购进一台数控机床，并立即投入生产使用，已知第一年维修、保养费用共 12 万元，从第二年开始，每年所需维修、保养费用都比上一年增加 4 万元，且该机床使用后，每年的总收入为 50 万元，设使用 x 年后 $\left(x\in N^*\right)$ 该数控机床的盈利额为 y 万元。

(1)写出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)使用几年后，该机床开始盈利（即：盈利额为正值）；

(3)假设在使用若干年后，对该机床的处理有以下两种方案：(I)当年平均盈利额达到最大值时，以 30 万元价格处理该机床；(II)当盈利额达到最大值时，以 12 万元价格处理该机床。请研究以下按照哪种方案处理较为合理？请说明理由。

十四、函数的奇偶性

【知识梳理】

一、定义：

1．偶函数：一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数．

2．奇函数： 一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫做奇函数．

二、注意：

1、如果函数 $y=f(x)$ 是奇函数或偶函数，我们就说函数 $y=f(x)$ 具有奇偶性；函数的奇偶性是函数的整体性质；

2、根据奇偶性可将函数分为四类：奇函数、偶函数、既是奇函数又是偶函数、既不是奇函数也不是偶函数；

3、由函数的奇偶性定义可知，函数具有奇偶性的一个必要条件是，对于定义域内的任意一个 x，则 $-x$ 也一定是定义域内的一个自变量（即定义域关于原点对称）．如果一个函数的定义域不关于“0”（**原点**）对称，则该函数既不是奇函数也不是偶函数；

4、偶函数的图象关于 **y 轴**对称, 反过来，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数为偶函数且 $f(x)=f(|x|)$

奇函数的图象关于**原点**对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数为奇函数．**若奇函数在 $x=0$ 处有定义，则有 $f\left(0\right)=0$．**

5、可以利用图象判断函数的奇偶性，这种方法称为**图象法**，也可以利用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性，这种方法称为**定义法**　用定义判断函数奇偶性的步骤是

⑴先求定义域，看是否关于原点对称；

⑵再判断 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 是否恒成立；

（3）作出相应结论．若 $f(-x)=f(x)$或$f(-x)-f(x)=0$,则$f(x)$是偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$或$f(-x)+f(x)=0$,则$f(x)$是奇函数

【例题解析】

例 1．判断下列函数的奇偶性，并证明（1）、（2）．

(1) $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$　　　　(2) $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|}$ (4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

常用结论：

(1)两个偶函数相加所得的和为偶函数.

(2)两个奇函数相加所得的和为奇函数.

(3)一个偶函数与一个奇函数相加所得的和为非奇函数与非偶函数.

(4)两个偶函数相乘所得的积为偶函数.

(5)两个奇函数相乘所得的积为偶函数.

(6)一个偶函数与一个奇函数相乘所得的积为奇函数.

分段函数奇偶性的判断

例 2. 判断并证明函数的奇偶性：$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+1 & (x>0)\\ -\dfrac{1}{2}x^2-1 & (x<0)\end{cases}$

已知函数的奇偶性求参数值：

例 3. 已知函数 $f(x)=(m-2)x^2+(m-1)x+3$ 是偶函数，求实数 m 的值.

例 4. 若函数 $F\left(x\right)=\left(1+\dfrac{2}{2^x-1}\right)\cdot f\left(x\right)$ 是偶函数，且 $f\left(x\right)$ 不恒等于 0，则函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性为__________________.

构造奇偶函数求值

例 5. 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，若 $f(-2)=10$，求 $f(2)$ 的值。

抽象函数的奇偶性判断

例 6. “定义在 R 上的任意一个函数 $f\left(x\right)$ 都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和”，判断这个命题的真假性，并说明理由.

例 7. 已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)$ $\left(x\in R,y\in R\right)$，且 $f\left(0\right)\neq 0$，求证：$f\left(x\right)$ 是偶函数.

例 8. 已知函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 的定义域都是 R，且 $f\left(x\right)$ 是偶函数，$g\left(x\right)$ 是奇函数，求证：函数 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 是偶函数.

【基础练习】

1．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 是偶函数，那么 $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$ 是（　　）.

A．奇函数　　B．偶函数　　C．既奇又偶函数　　D．非奇非偶函数

2．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+\left(b-3\right)x+3,x\in\left[a^2-2,a\right]$ 是偶函数，则 $a+b=$__________.

3．已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x\left(x-2\right)$，则 $f\left(x\right)$ 在 R 上的表达式是（　　）.

A．$y=x\left(x-2\right)$　　B．$y=x\left(\left|x\right|-1\right)$　　C．$y=\left|x\right|\left(x-2\right)$　　D．$y=x\left(\left|x\right|-2\right)$

4．已知 $f\left(x\right)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f\left(-2\right)=10$，那么 $f\left(2\right)=$__________.

5．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ 是（　　）

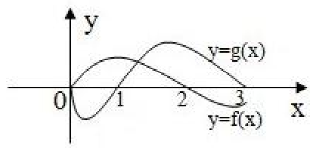
A．偶函数　　B．奇函数　　C．非奇非偶函数　　D．既是奇函数又是偶函数

6．函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|-2}{\sqrt{1-x^2}}$ 的奇偶性为________（填奇函数或偶函数）.

7. 已知 $f\left(x\right)$ 是偶函数，$g\left(x\right)$ 是奇函数，若 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为_______.

8．已知函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，且其图象与 x 轴有四个交点，则方程 $f\left(x\right)=0$ 的所有实根之和为________.

9. 已知 $y=f\left(x\right)$ 是偶函数，$y=g\left(x\right)$ 是奇函数，它们的定义域均为 $\left[-3,3\right]$，且它们在 $x\in\left[0,3\right]$ 上的图像如图所示，则不等式 $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}<0$ 的解集是___________________.



10. 设函数 $y=f\left(x\right)$（$x\in R$ 且 $x\neq 0$）对任意非零实数 x_1,x_2 满足 $f\left(x_1\cdot x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$，求证 $f\left(x\right)$ 是偶函数.

十五、函数的单调性

【知识梳理】

1．增函数、减函数

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，区间 $D\subseteq I$，如果对于任意 x_1，$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，则有：(1)$f(x)$ 在区间 D 上是增函数$\Leftrightarrow$$f(x_1)<f(x_2)$；

(2)$f(x)$ 在区间 D 上是减函数$\Leftrightarrow$$f(x_1)>f(x_2)$.

2．单调区间的定义

若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，则称函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

注意：

（1）函数的单调区间是指函数在定义域内的某个区间上单调递增或单调递减．单调区间只能用区间表示，不能用集合或不等式表示；如有多个单调区间应分别写，不能用并集符号“∪”连接，也不能用“或”连接，***应该使用“和”连接.***

（2）两函数 $f(x)$，$g(x)$在 $x\in(a，b)$上都是增(减)函数，则 $f(x)+g(x)$也为增(减)函数，但 $f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{1}{f\left(x\right)}$等的单调性与其正负有关，切不可盲目类比．

3. 判断函数单调性的四种方法

(1)定义法： 取值、作差、变形、定号、下结论；

(2)复合法：同增异减，即内外函数的单调性相同时，为增函数，不同时为减函数；

(3)图像法：如果 $f(x)$是以图像形式给出的，或者 $f(x)$的图像易作出，可由图像的直观性判断函数单调性．

注意：若题目要求“证明”时，则只能使用定义法.

【例题解析】

一、求函数的单调区间

例 1. 写出(1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x)=x+\dfrac{a}{x}\left(a\in R\right)$的单调区间

二、函数单调性的证明

例 2. 判断函数 $y=x^3$ 在定义域上的单调性，并证明。

注意：利用定义判断或证明函数的单调性时，作差后要注意差式的分解变形成乘积的形式．

练习：判断函数 $g(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$在 (1，$+\infty$)上的单调性．

三、复合函数单调性

例 3.　函数 $f(x)=\dfrac{1}{-x^2+2x+8}$ 的递增区间是__________________.

四、含参数的函数单调性问题

例 4. 设函数 $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{a}{x}$，其中 a 为实常数.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围.

练习：1. 设函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-ax\left(a>0\right)$，若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上是单调函数，则实数 a 的取值范围是________________.

2. 已知函数 $y=\begin{cases}\left(3a-1\right)x+4a & x<1\\ \left(a-1\right)x^2 & x\geq 1\end{cases}$ 是定义在 R 上的减函数，则实数 a 的取值范围是________________.

五、利用函数性质解不等式

例 5. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-4x+3, x\leq 0\\ -x^2-2x+3, x>0\end{cases}$ 则不等式 $f\left(a^2-4\right)>f\left(3a\right)$ 的解集为(　　)

A．(2,6)　　B．(－1,4)　　C．(1,4)　　D．(－3,5)

练习：设定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$, 求实数 m 的取值范围.

六、抽象函数的单调性

例 6. 若函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数，且对任意 $x,y\in R^+$，都有 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$，若当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)<0$，则：

(1)判断 $f\left(x\right)$ 的单调性，并予以证明；

(2)若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，解不等式 $f\left(x\right)+f\left(5-x\right)\geq -2$.

【基础练习】

1. 若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间[1,2]上都是减函数，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(0,1]$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,1]$

2．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+4x, & x\geq 0\\ 4x-x^2, & x<0\end{cases}$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-1)\cup(2，+\infty)$　　B．$(-1,2)$

C．$(-2,1)$　　D．$(-\infty，-2)\cup(1，+\infty)$

3．用 $\min\{a，b，c\}$ 表示 a，b，c 三个数中的最小值．设 $f(x)=\min\{2^x，x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$，则 $f(x)$ 的最大值为　　(　　)

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

4．已知定义在 **R** 上的增函数 $f(x)$，满足 $f(-x)+f(x)=0$，x_1，x_2，$x_3\in$ **R**，且 $x_1+x_2>0$，$x_2+x_3>0$，$x_3+x_1>0$，则 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的值 (　　).

A．一定大于 0　B．一定小于 0　　C．等于 0　　D．正负都有可能

5. 若函数 $y=f(x),x\in D,$ 为非奇非偶函数，则有（　　）。

A. 对于任意的 $x_0\in D,$ 都有 $f(-x_0)\neq f(x_0)$ 且 $f(-x_0)\neq -f(x_0)$；

B. 存在 $x_0\in D,$ 使 $f(-x_0)\neq f(x_0)$ 且 $f(-x_0)\neq -f(x_0)$；

C. 存在 x_1、$x_2\in D,$ 使 $f(-x_1)\neq f(x_1)$ 且 $f(-x_2)\neq -f(x_2)$；

D. 对于任意的 $x_0\in D,$ 都有 $f(-x_0)\neq f(x_0)$ 或 $f(-x_0)\neq -f(x_0)$

6．函数 $y=-(x-3)|x|$ 的递增区间是________.

7．设 $f(x)$ 是增函数，则下列结论一定正确的是________(填序号).

①$y=[f(x)]^2$是增函数；②$y=\frac{1}{f(x)}$是减函数；③$y=-f(x)$是减函数；④$y=|f(x)|$是增函数．

8．已知函数$f(x)=a-\frac{1}{|x|}$.

(1)求证：函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数；

(2)若$f(x)<2x$在$(1,+\infty)$上恒成立，求实数a的取值范围．

9．已知$f(x)=x^2+ax+3-a$，若$x\in[-2,2]$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立，求a的取值范围．

10．已知$f(x)$是定义在$[-1,1]$上的奇函数，且$f(1)=1$，若a，$b\in[-1,1]$，$a+b\neq 0$时，有$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$成立．

(1)判断$f(x)$在$[-1,1]$上的单调性，并证明它；

(2)解不等式：$f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$；

(3)若$f(x)\leq m^2-2am+1$对所有的$a\in[-1,1]$恒成立，求实数m的取值范围．

参考答案

一、集合及其表示方法

【例题解析】

例 1、（2）（3）.

例 2、 （1）① $\{x \mid x=3n-2, n \in N \text{且} n \leq 5\}$；② $\{x \mid x=-2n, n \in N \text{且} n \leq 5\}$；

（2）①{（1，1），（1，2），（2，1）（2，2）}；② $\{(\frac{8}{3},-\frac{2}{3})\}$；

③ {-1，1}；④ {（0，8）（2，5），（4，2）}

⑤{（1，1），（1，2），（1，4）（2，1），（2，2），（2，4），（4，1），（4，2），（4，4）}

例 3、解：(1)若 $a^2+1=5$，得 a＝2(由 A 中元素互异性可舍去)或 a＝－2，此时 B＝{0，7，1，4}(2)若 $a^2-a=5$，得 $a^2-a-5=0$，由 B 中元素互异性知不符合题意。

由(1)、(2)可知：集合 B＝{0，7，1，4}。

例 4、 (1) $a>\frac{9}{8}$； (2) $a=\frac{9}{8}$时，$x=\frac{4}{3}$，$a=0$时，$x=\frac{2}{3}$； (3) $a \geq \frac{9}{8}$或$a=0$。

例 5、（1） $A=\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$；（2）不能。假设 $A=\{a\}$，于是 $a=\frac{1}{1-a} \Rightarrow a^2-a+1=0$。该方程无实数解。

【基础练习】

1. （1）否；（2）否；（3）否. 2. -2,0,2；3. $\left\{0, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$；4. 0，−1；

5. A、C. 6. A . 7. $a \neq 0$或$\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$； $a=b=0$；8. $\{(-1, 2)\}$；

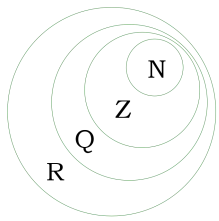
9. (1) $\{1, 3, 5, 15\}$, (2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, (3) $\{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$.

10. (1) $\{x \mid x=2n, n \in Z\}$, (2) $\{x \mid x=3n+1, n \in Z\}$, (3) $\{(x, y) \mid x<0, y>0\}$.

（4）$\{(x,y) \mid x^2-3y^2=1\}$，（5）$\{y \mid y=-x^2+3\}$

11. $B=\{0, 1, 2, 3\}$； 12. $\{0, 2, 3, 4, 5\}$.

二、集合及其表示方法



【例题解析】

例 1、（1）：$N \subsetneqq Z \subsetneqq Q \subsetneqq R$

（2）①正确；②错误，因为 A 可能是空集 ③正确；④错误

例 2、（1）$N \subsetneqq Z$， $N \subsetneqq Q$， $R \supsetneqq Z$， $R \supsetneqq Q$， $\Phi \subsetneqq \{0\}$

（2）∵A={x∈R|x^2 -3x-4=0}＝{-1,4},

B={x∈Z||x|<10}={-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}∴A$\subseteq$B 正确

（3）对任意一个集合 A，都有 A$\subseteq$A，

（4）集合{a,b}的子集有：Φ、{a}、{b}、{a,b}

（5）A、B 的关系为$A \subseteq B$.

例 3、(1)若 a＝1，则违背 A 中元素的互异性，不符合题意；

(2)若 $a^2=1$，得 a＝±1(a＝1 舍去)

当 a＝－1 时，A＝{1，－1，b}，B＝{－1，1，－b}，由 b＝－b 知 b＝0

(3)若 ab＝1 且 $a^2=b$ 可求得 a＝1，b＝1(舍去)

由(1)、(2)、(3)可知：a＝－1，b＝0

例 4、a＞4。

变式 1：解：由$\begin{cases}-2a-2<-2\\a+1>4\end{cases}$ 得$\begin{cases}a>0\\a>3\end{cases}$，则 a＞3

变式 2：

解：由$\begin{cases}-2a-2\geq -2\\a+1\leq 4\end{cases}$ 得$\begin{cases}a\leq 0\\a\leq 3\end{cases}$，则 a≤0

例 5、 (1)集合{a,b}的所有子集的个数是 4 个，即Ø,{a},{b},{a,b}。

(2) 集合{a,b,c}的所有子集的个数是 8 个，即Ø,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}。

猜想：(1)集合{a,b,c,d}的所有子集的个数是多少？($2^4=16$)

(2)集合$\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$的所有子集的个数是多少？(2^n)

结论：含 n 个元素的集合$\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$的所有子集的个数是2^n，所有真子集的个数是2^n-1，

非空真子集数为2^n-2。

例 6、解：P＝{2，－3}

(1)若 Q＝{2}，由 2a＋1＝0 得 a＝$-\dfrac{1}{2}$；(2)若 Q＝{－3}，由－3a＋1＝0 得 a＝$\dfrac{1}{3}$

(3)若 Q＝Φ，得 a＝0　　　　　由(1)、(2)、(3)知：a∈{$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，0}

***例 7、解：（1）设 $x\in S$，则 $x=2n+1,n\in Z$，若 $n=2k,k\in Z$，则 $x=4k+1\in T$；若 $n=2k-1,k\in Z$，则 $x=4k-1\in T$，$\therefore S\subseteq T$。

（2）设 $x\in T$，则 $x=4k\pm1,k\in Z$，若 $x=4k+1$，则 $x=2(2k)+1\in S$，若 $x=4k-1$，则 $x=2(2k-1)+1\in S$，$\therefore T\subseteq S$。　　综上，$S=T$

****例 8、(1) 设奇数 $a=2k+1\ (k\in Z)$，$\because a=2k+1=k^2+2k+1-k^2=(k+1)^2-k^2$，$\therefore a\in M$，所以{奇数}$\subseteq M$；　又$\because$ $0=1^2-1^2$，$\therefore 0\in M$，而 0 是偶数，所以{奇数}$\subsetneqq M$ 成立。（2）若 $2k\in M$，设 $2k=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，$\because$整数 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，而 $2k=(x+y)(x-y)$ 是偶数，　$\therefore x+y$，$x-y$ 都是偶数，即 $2k$ 是 4 的倍数，所以 k 是偶数。于是，当 k 是偶数时，偶数 $2k\in M$ 成立。

（3）若 a，$b\in M$，设 $a=x^2-y^2$，$b=n^2-m^2$，则 $ab=\cdots=(xn+ym)^2-(xm+yn)^2$，$\therefore ab\in M$。

【基础练习】

1. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. 2. $a=-1$，$b=0$。3. $\varnothing,\{0\},\{2\},\{0,2\}$；4. $a\leq1$；

5. $t=2$或$t=-1$；6. $-4<a\leq4$；7. C；8. A；9. 3 个；10. $A\subseteq B$, $B\subseteq A$, $A\subseteq C$, $C\subseteq A$；11. $\left\{a\,|\,\dfrac{1}{3}\leq a<1\right\}$；12. $C=\{0,1,2\}$

三、集合的运算

【例题解析】

例 1 （1）A⋂B=｛x|x>-2｝⋂｛x|x<3｝=｛x|-2<x<3｝.

（2）A⋂B=｛x|x 是等腰三角形｝⋂｛x|x 是直角三角形｝=｛x|x 是等腰直角三角形｝.
（3）A⋃B=｛3,4,5,6,7,8｝.

例 2、∵A＝｛x丨1≤2x＋1＜9｝＝｛x|0≤X＜4｝，U＝R。∴C_UA＝｛x丨x＜0，或 x≥4｝。

例 3、∵S＝｛x|－3≤x＜6｝，A＝｛x|0≤x＜3｝， B＝｛x|3<x＜6｝

∴C_SB＝｛x|－3≤x≤3｝∴A⊂C_SB

例 4、（1）A⋃B=｛x|-1<x<2｝⋃｛x|1<x<3｝=｛x|-1<x<3｝.

（2）A⋂B=｛(x,y)|y=-4x+6｝⋂｛(x,y)|y=5x-3｝=｛(x,y)| $\begin{cases} y=-4x+6 \\ y=5x-3 \end{cases}$ ｝=｛(1,2)｝

（3）C_UA=｛1,2,6,7,8｝ C_UB=｛1,2,3,5,6｝

(C_UA)⋂(C_UB)=C_U(A⋃B)=｛1,2,6｝ (C_UA)⋃(C_UB)=C_U(A⋂B)=｛1,2,3,5,6,7,8｝

（4）C_UA=｛(1，1)，(2，2)｝.

例 5、(1) ∵ $A\cap R=\varnothing$，∴ $A=\varnothing$，故 $\Delta=p^2-4<0$，从而可得 $-2<p<2$。

(2) $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，∵ $A=\{x_0\}$，∴ $\Delta=p^2-4=0$， $p=\pm 2$。

当 $p=2$ 时， $A=\{-1\}$， $C_UA=\{-2,0,1,2\}$；当 $p=-2$ 时， $A=\{1\}$， $C_UA=\{-2,-1,0,2\}$。

★★★例 6、 $A\Delta B=\left\{\, y\mid -3\le y<0 或 y>3 \,\right\}$

★★★例 7、(1) $A=\{y\mid 0\le y\le k+1\}$； 当 $-1<k<0$ 时， $B=\{y\mid k^2\le y\le 1\}$；当 $0\le k\le 1$ 时， $B=\{y\mid 0\le y\le 1\}$；当 $k>1$ 时， $B=\{y\mid 0\le y\le k^2\}$。

(2) 据题意， $A=B$，当 $-1<k<0$ 时， $\begin{cases} k^2=0 \\ k+1=1 \end{cases}\Rightarrow k=0$（舍）； 当 $0\le k\le 1$ 时， $k+1=1\Rightarrow k=0$；当 $k>1$ 时， $k^2=k+1\Rightarrow k^2-k-1=0$，解得 $k=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$。综上， $k=0$ 或 $k=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$。

【基础练习】

1、D；2、2；3、(C_UB=C_U(C_UA，$C_U\phi$＝U，C_UU＝ϕ)；4、C_UA=｛不等腰梯形｝.

5、C_UA=｛x|x≤−2，或 x≥−1｝；6、a=-2；7、A⋂B= {x|1≤x≤5}, A⋃B=R.
8、M⋃N=｛(x,y) |xy=-1,或 xy=1(x＞0)｝.
9、(1) $A\cap B=\left\{\, y\mid -1\le y\le 2 \,\right\}$， (2) $A\cap B=\{(1,0),(-1,0)\}$.

10、 $a=8,b=6$. 11、 $a=2$ 或 3 . 12、 $A\cup B=\left\{-4,\dfrac13,\dfrac12\right\}$.

四、命题的形式及等价关系

【例题解析】

例 1、(1) 真命题。(2) 假命题。(3) 因为语句中含有变量 x，当 x 的值没有确定之前，我们无法判断语句的真假，所以它不是命题。把含有变量的语句叫做“开语句”， 一般开语句不是命题。(4) 真命题。(5) 假命题。(6) 因为没有对 $m+n$ 是否是整数做出判断，所以它不是命题。疑问句不是命题。

例 2、A 在听音乐；B 在看书；C 在修指甲；D 在梳头发.

例 3、∵ （1）、（3）矛盾， ∴ 其中必一真一假。 ∴ （2）必假，即苹果在黄箱中。

例 4、(1) 原命题：若 α、β 是对顶角，则 $\alpha=\beta$；逆命题：若 $\alpha=\beta$，则 α、β 是对顶角；

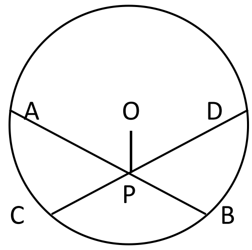
否命题：若α、β不是对顶角，则$\alpha \neq \beta$； 逆否命题：若$\alpha \neq \beta$，则α、β不是对顶角。

（2）原命题：若一个数是负数，则它的立方根是负数；
逆命题：若一个数的立方根是负数，则它是负数；
否命题：若一个数不是负数，则它的立方根不是负数；
逆否命题：若一个数的立方根不是负数，则它不是负数。

（3）原命题：若一个整数的各位数字之和是3的倍数，则它是3的倍数；
逆命题：若一个整数是3的倍数，则它的各位数字之和是3的倍数；
否命题：若一个整数的各位数字之和不是3的倍数，则它不是3的倍数；
逆否命题：若一个整数不是3的倍数，则它的各位数字之和不是3的倍数。

（4）原命题：若a、b是无理数，则$a+b$是无理数；
逆命题：若$a+b$是无理数，则a、b是无理数；
否命题：若a、b不都是无理数，则$a+b$不是无理数；
逆否命题：若$a+b$不是无理数，则a、b不都是无理数。

例 5、已知：如图：在⊙O 中，弦 AB、CD 交于点 P，且 AB、CD 不是直径。
求证：弦 AB、CD 不被 P 平分。



证明：假设弦 AB、CD 被 P 平分，连结 OP，
由平面几何知识可推出：OP⊥AB 且 OP⊥CD
在平面内过一点 P 有两条直线 AB 和 CD 同时与 OP 垂直，这与垂线性质矛盾，则原命题成立。

例 6、假设$\sqrt{2}$是有理数，可设$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$(a、b∈N*且 a、b 互质)

∴a＝$\sqrt{2}$ b 得 a^2＝2b

∵a、b∈N*且 a、b 互质 ∴ a 中必含 2 的因子，得 a^2 必含 4 的因子

∵a^2＝2b ∴ b 中必含 2 的因子 由 a、b 均含 2 的因子可知与 a、b 互质矛盾

∴假设不成立，则$\sqrt{2}$是无理数。

【基础练习】

1. $x=0且y=0 \Rightarrow |x|+|y|=0$；$|x|+|y|\neq 0 \Rightarrow x\neq 0或y\neq 0$；$x\neq 0或y\neq 0 \Rightarrow |x|+|y|\neq 0$

2. 若$A\cap B=A$ 则$A\subseteq B$ ； 若A不是B的子集,则$A\cap B\neq A$ ；

若$A\cap B\neq A$,则A不是B的子集

3. a,b为整数，如果$a+b$不是偶数，那么a,b不都是偶数。真

5. C 6. B 7. C 8. C 9. D

10.

原命题	若直线到圆心距离等于半径，则该直线是圆的切线	真
逆命题	若直线是圆的切线，则该直线到圆心距离等于半径	真
否命题	若直线到圆心距离不等于半径，则该直线不是圆的切线	真
逆否命题	若直线不是圆的切线，则该直线到圆心距离不等于半径	真

五、充分条件、必要条件

【例题解析】

例 1.（1）A是B的充分条件；（2）A是B的必要条件；（3）A是B的充要条件；（4）A既不是B的充分条件，又不是B的必要条件。

拓展： A 是 B 的充分不必要条件：A 改为：$a>b>0$；

A 是 B 的必要不充分条件：B 改为：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$；

A 是 B 的充要条件：条件改为：已知 $ab>0$。

例 2.(1) A 的充分不必要条件是：$a=1$，$b=0$，$c=-1$；

A 的必要不充分条件是：$ac\le 0$；A 的充要条件是：$ac<0$。

(2) B 的充分不必要条件是：$ABCD$ 是矩形；

B 的必要不充分条件是：$ABCD$ 是四边形；

B 的充要条件是：$ABCD$ 是有一组对边平行且相等的四边形。

例 3. （1）p:$0<x<3$，q:$-1<x<3$.p 是 q 的充分但不必要条件.

（2）$p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$.p 是 q 的必要但不充分条件.（3）p 是 q 的充要条件.

例 4. (1) 设 A＝{x| x＞2}，B＝{x| x≥2}

∵ $A\subsetneqq B$ ∴ $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\alpha\nLeftarrow\beta$ ∴ α 是 β 的充分非必要条件

(2) 设 A＝{x| x^2＝1}＝{－1，1}，B＝{1}

∵$A\supsetneqq B$ ∴ $\alpha\nRightarrow\beta$ 且 $\alpha\Leftarrow\beta$ ∴ α 是 β 的必要非充分条件

例 5.设 A＝{x|1≤x≤3}，B＝{x|m＋1≤x≤2m＋4，m∈R }

∵ α 是 β 的充分条件，∴ $\alpha\Rightarrow\beta$ 得 $A\subseteq B$

∴ $\begin{cases} m+1\leqslant 1 \\ 2m+4\geqslant 3 \end{cases}$ 解得：$-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant 0$

【基础练习】

1.① 2.② 3.③ 4.③ 5.② 6. ④ 7.② 8.④

9. B 10. B 11. A 12. A

13.解（1）$ac<0$； （2）$b^2-4ac\ge 0$ 且 $ab>0$ 且 $ac>0$；

（3）$c=0$ 且 $ab<0$； （4）$a>0$ 且 $b^2-4ac<0$。

六、不等式的基本性质

【例题解析】

例 1. B；例 2. 正确；错误；错误；错误；正确；正确；错误；正确；例 3. 作差法；

例 4. 待定系数法：$1\le 3a-b\le 7$；例 5. 3 个；例 6. 作差法；

例 7. 当 m=1 时，0>-m=-1 恒成立，x∈R。当 m<1 时，x<m/(1-m)。当 m>1 时，x>-m/(m-1)

【基础练习】

1.D；2.C；3.A；4. A；5. D；6. A；7. ②③⑥⑦⑧；8. ①②；9. [-5， 7]；

10. 解：不等式即（m+2）（m-2）x＜m+2，

当 m=-2 时，不等式即 0•x＜0，可得它的解集为∅；

当 m＜-2 时，不等式即（m-2）•x＞1，可得它的解集为{x|x＜1/(m-2)}；

当-2＜m＜2 时，不等式即（m-2）•x＜1，可得它的解集为{x|x＞1/(m-2)}；

当 m=2 时，不等式即 0•x＜4，可得它的解集为 R；

当 m＞2 时，不等式即（m-2）•x＜1，可得它的解集为{x|x＜1/(m-2)}；

11. 作差法，$\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{a-b}{b^2}+\dfrac{b-a}{a^2}=(a-b)\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)=\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}\ge 0$

【拓展练习】

12. B；13. (－3π／2，π／2)；14. （-2，-1/2）

七、一元二次不等式的解法

【例题解析】

一元二次不等式的解法

例 1. (1) －1/2<x<2　　(2)(3－√3)/3<x<(3+√3)/3　　(3)x=1/2　　(4)－5<x<1　　(5) ∅

例 2. $1 \le x < 4$或$-3 < x \le 0$

例 3. $\left\{x \middle| x > 1或x < -\dfrac{1}{10}\right\}$

例 4.　m＜－1/8.

例 5. $(x-1)(x-a)<0$.　　∴当 $a>1$ 时，原不等式的解为 $1<x<a$；

当 $a=1$ 时，原不等式的无实数解；　　当 $a<1$ 时，原不等式的解为 $a<x<1$.

例 6. 已知关于 x 的不等式$(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3>0$对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围。

解：当 $m^2+4m-5=0$ 和≠0 分别讨论，解得［1,19).

【基础练习】

1. D。2. D。3.（1）{x|x＜0 或 x＞1}　　（2）无解　　（3）{x|x－3<x<1/2}　　（4）{x|－3≤x≤1}；4. （－2，2]；5. a＞2；6. ∅。7. [－1/8，+∞)；

8. $b=-4$，$c=6$.　　∴$-\dfrac{1}{2} \le x \le 2$.

9. 解：即(x－a)(x－1)<0，①a<1，a<x<1，②a=1，无解，③a>1，1<x<a

10. 解：（1）a=－2，b=3（2）$-2x^2+3x-1>0$，{x|1/2＜x＜1}

11.解：$\dfrac{x-a}{x-a^2}<0 \Leftrightarrow (x-a)(x-a^2)<0$，(2 分)

①当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，原不等式的解集为∅；(4 分)

②当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，$a<a^2$，此时 $a<x<a^2$；(7 分)

③当 $0<a<1$ 时，$a>a^2$，此时 $a^2<x<a$.(10 分)

综上，当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，原不等式的解集为$\{x|a<x<a^2\}$；

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为$\{x|a^2<x<a\}$；

当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，原不等式解集为∅ .(12 分)

12. 解：$ax^2-2(a+1)x+4>0 \Leftrightarrow (ax-2)(x-2)>0$…

①a=0 时，x-2＜0⇔x∈（-∞，2）…

②0＜a＜1 时，(x-2/a)(x-2)＞0⇔x∈(-∞，2)∪(2/a，+∞)

③a=1 时，$(x-2)^2>0$⇔x∈（-∞，2）∪（2，+∞）…

④a＞1 时，(x-2/a)(x-2)＞0⇔x∈(-∞，2/a)∪(2，+∞)…

⑤a＜0 时，(x-2/a)(x-2)＜0⇔x∈(2/a，2)…

【拓展练习】

13. 解：作差法。$a=\dfrac{1}{2}$

14. 解：原式=（4x+a）（3x－a）＞0，

令（4x+a）（3x－a）=0，解得 x＝–a/4 或 a/3

①当 a＞0 时，–a/4＜a/3，不等式的解集为{x|x＜–a/4 或 x＞a/3}；

（2）当 a=0 时，–a/4= a/3，不等式的解集为{x|x∈R，且 x≠0}；

（3）当 a＜0 时，–a/4＞a/3，不等式的解集为{x|x＞–a/4 或 x＜a/3}.

15. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a,b,c\in R)$满足：对任意实数 x，都有 $f(x)\ge x$，

且当 $x\in(1,3)$ 时，有 $f(x)\le\frac{1}{8}(x+2)^2$ 成立；

（1）证明：$f(2)=2$；（2）若 $f(-2)=0$，求 $f(x)$ 的表达式；

解：（2）f(x)= 1/8 $(x+2)^2$

八、一元二次不等式的应用

【例题解析】

例 1. $a\in[0,1]$；例 2. $a\ge\frac{10}{3}$或$a\le-2$. 例 3. (1) -1≤a≤2（2）$\because A\cup B=R$

①$a<a^2$时，不存在，②$a>a^2$时，不存在，③$a=a^2$时，不存在

例 4. $a\ge3$或$a\le-1$ 例 5.（1）$p\ge2$ （2）$p>2$ （3）$p>2$ （4）$2\le p<3$

（5）开口向上，$2<p<3$ 例 6. 2.4 元

【基础练习】

1. 6；2. -2＜m≤2；3. $0\le a<3$；4.-$\frac{1}{3}$ <*m*< $\frac{5}{3}$ ；5. $m\ge11$；6. $x<1$或$x>3$

7. $m<-1$。8. $-\frac{5}{6}<m<-\frac{1}{2}$；9. (-∞,-$\frac{3}{2}$)∪($\frac{5}{4}$,+∞)；10. $2<a<\frac{11}{5}$或$a<-1$

11. $-1<m<0$；12. (1) $m=2$ (2) m＞5 或 m＜-3。13. $2\le r\le8$

14.最大限制速度是 25/2m/s.

九、其他不等式的解法

【例题解析】

例 1. (1) 2≤x≤9/2 (2)x≥1/2 或 x≤－2；例 2.（1）m＜－6 或 m＞3 （2）m>12

例 3.当 a＞1 时，不等式解集为{x|x＞2 或 x＜$\frac{a-2}{a-1}$}；当 a=1 时，解集为{x|x＞2}；若 0＜a＜1 时，不等式的解集为{x|2＜x＜$\frac{a-2}{a-1}$}；若 a＜0 时，不等式解集为：{x|$\frac{a-2}{a-1}$＜x＜2}

例 4. (1) 1<x<2 或 x<－1 (2) $x<-1$且$x\ne-2$或$1<x<2$；

例 5. (1) $2\le x<4$或$-3<x\le-2$ (2) 3/2＜x＜5/2；例 6. －5/2＜x＜3/2；例 7. $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{2}$

例 8. $m=1$

【基础练习】

1. $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},4\right]$；2. $(-1,1)\cup(2,3)$；3. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$

4. $x\ge1$或$-1\le x<0$；5. $3\le x\le4$或$1\le x\le2$；6. x＞2 或 x＜－3

7. $3<x<5或0\le x\le 2$；8. $\{x|-3<x<2\}$；9. $a=-3$；10. $a=-6$

11. $[0,1]$；12. (﹣∞，﹣5)∪(5，+∞)；13. $a=-1或1\le a\le 3$；14. $-5<x<1$

15. 解： 当 $a>1$ 或 $a<0$ 时，$a^2>a$，则不等式的解集为 (a,a^2)

当 $0<a<1$ 时，$a^2<a$，则不等式的解集为 (a^2,a)

当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$

【拓展练习】

16. a=1/2.b=3/2；17. x<﹣1 或 2<x≤3；18. a=﹣3

十、 基本不等式

【例题解析】

例 1. (1) 原式≥$2\sqrt{2}$　　(2)原式≤﹣2√2　　(3)原式≥2√2 或≤﹣2√2

例 2. 原式≤1/4；例 3. 原式≥3；例 4. 原式≥21/4；例 5. 原式≥3；例 6. 9；例 7. 32/75

例 8. 长为 18m，宽为 9m 时，面积最大为 162m²．

【基础练习】

1. $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$；2. 6；3. $2\sqrt{2}$；4. 7；5. 4；6. 49/12；7. 1；8. 9；9. 3；10. 9；11. $2\le y\le 2\sqrt{2}$

12. 4；13. （1）略　　（2）略　　（3）$\therefore S\le\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}C^2$

十一、不等式的证明

【例题解析】

1.提示：当 $a,b>0$ 时，$(\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b})-(a+b)=\dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\ge 0$

所以 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\ge a+b$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

2.提示：$a^2+b^2\ge 2ab,b^2+c^2\ge 2bc,c^2+a^2\ge 2ca$，

上述三个不等式相加，得 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

3 提示：由于 $\sqrt{(a+1)(b+1)},\sqrt{ab}+1$ 都是正数

原不等式

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1) \geq ab+1+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

成立，所以 $\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq \sqrt{ab}+1$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

4.(1 的代换)提示：当 $a,b,c>0$ 时，左边 $=\left(\dfrac{a+b+c}{a}-1\right)\cdot\left(\dfrac{a+b+c}{b}-1\right)\cdot\left(\dfrac{a+b+c}{c}-1\right)$ $=\dfrac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc} \geq \dfrac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=8$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

5.提示：假设 $(1-a)b>\dfrac{1}{4},(1-b)c>\dfrac{1}{4},(1-c)a>\dfrac{1}{4}$ 都成立，

可得 $(1-a)b\cdot(1-b)c\cdot(1-c)a>\dfrac{1}{64}$

而当 $0<a<1$ 时，得 $0<(1-a)a \leq \dfrac{1}{4}$，同理 $0<(1-b)b \leq \dfrac{1}{4}, 0<(1-c)c \leq \dfrac{1}{4}$

可得 $(1-a)a\cdot(1-b)b\cdot(1-c)c \leq \dfrac{1}{64}$，与假设矛盾，

可知 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 中至少有一个不大于 $\dfrac{1}{4}$.

6.提示：由 $x,y,z>0$，$\sqrt{x^2+xy+y^2}>\sqrt{x^2+xy+\dfrac{y^2}{4}}=x+\dfrac{y}{2}$，

$\sqrt{y^2+yz+z^2}>\sqrt{y^2+yz+\dfrac{z^2}{4}}=y+\dfrac{z}{2}$，

上述两不等式相加，得 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}>x+y+z$

7.提示：构造函数 $f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2$

$=(a_1^2+a_2^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2)x+(b_1^2+b_2^2)$

由于对任意实数 x，$f(x)\geq 0$ 总成立，因此

$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2)^2-4(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\leq 0$

$(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

当且仅当 $b_i=0$ 或 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 时等号成立

注：用比较法或向量法证明亦可.

【基础练习】

1. 提示：$(a^n+b^n)-(a^{n-1}b+ab^{n-1})=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$

当$0<a<b$或$0<b<a$时，$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})>0$；

当$a=b$时，$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})=0$

所以$a^n+b^n\ge a^{n-1}b+ab^{n-1}$，当且仅当$a=b$时等号成立.

2.提示：由$x,y>0$知，$x+y\ge 2\sqrt{xy},x^2+y^2\ge 2xy,x^3+y^3\ge 2\sqrt{x^3y^3}=2xy\sqrt{xy}$

所以$(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\ge 8x^3y^3$，当且仅当$x=y$时等号成立.

3.提示：由$a^2+b^2\ge 2ab$得$\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，

同理可得$\sqrt{b^2+c^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{a^2+c^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$，

三式相加$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

4. 分析法证明：要证$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$，即证$n+n+1+2\sqrt{n\left(n+1\right)}<4n+2$，即证$2\sqrt{n\left(n+1\right)}<2n+1$，即证$4n\left(4n+1\right)<4n^2+4n+1$，即证$0<1$. 而$0<1$显然成立，且以上步骤均可逆推，所以原不等式成立.

5.提示：记$x=\sqrt{a+\dfrac{1}{2}},y=\sqrt{b+\dfrac{1}{2}}$，则$x^2+y^2=a+b+1=2$，

由$x^2+y^2\ge 2xy$，可推得$2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

又$x,y\ge 0$，可得$x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

当且仅当$x=y$，即$a=b=\dfrac{1}{2}$时等号成立.

6.提示：$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2=2(a-1)^2(a^2+a+1)\ge 0$

所以$3(1+a^2+a^4)\ge(1+a+a^2)^2$，当且仅当$a=1$时等号成立.

7.提示：由已知，$b+c-a>0,c+a-b>0,a+b-c>0$

$$4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2=(b+c-a)a+(c+a-b)b+(a+b-c)c>0$$

所以$4(ab+bc+ca)>(a+b+c)^2$.

8.提示：原不等式

$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2-\frac{25}{4}xy+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+(x+y)^2-2xy-\frac{25}{4}xy+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2-\frac{33}{4}xy+2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-8)(xy-\frac{1}{4})\ge 0$$

由已知，$x,y>0,x+y=1$，得$xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2=\frac{1}{4}<8$，

所以$(xy-8)(xy-\frac{1}{4})\ge 0$成立，即原不等式成立，当且仅当$x=y=\frac{1}{2}$是等号成立.

9.提示：假设$a(2-b)>1,b(2-c)>1,c(2-a)>1$都成立，

那么$a(2-b)\cdot b(2-c)\cdot c(2-a)>1\cdots\cdots(*)$，

又$a,b,c\in(0,2)$，则$0<a(2-a)\le 1,0<b(2-b)\le 1,0<c(2-c)\le 1$

可得$0<a(2-a)\cdot b(2-b)\cdot c(2-c)\le 1$，与(*)矛盾，可知原命题成立.

10.提示：设$a=\frac{1}{2}+x,b=\frac{1}{2}-x,x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

则$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}+x}+\frac{1}{\frac{3}{2}-x}=\frac{3}{\frac{9}{4}-x^2}$，其中$\frac{9}{4}-x^2\in(2,\frac{9}{4}]$，则$\frac{3}{\frac{9}{4}-x^2}\in[\frac{4}{3},\frac{3}{2})$，

所以原不等式成立.

十二、函数的概念

【例题解析】

例 1、(1) $x\in(-4,2]$；(2) $x\in[-1,2]$；(3) $x\in\left[-2,-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,2\right]$

例 2、$f(1)=2$，$f(x+1)=x^2+2x+2$

例 3、(1) $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$；(2) $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2-2}\left(x\le -2或x\ge 2\right)$；(3) $f\left(x\right)=\frac{8}{3x}-\frac{4x}{3}$

例 4、 B. 解释：AD 错，因为自变量需为非空数集，而变量x不是实数. C 错，因为同样身

高的同学可能有很多个.

例 5、0 或 1；例 6、2 个．例 7、$(1)[-3,-2]\cup[2,3]$　　$(2)(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$；例 8、$\left[0,1\right]$

【基础练习】

1、$\frac{x}{x-1}(x\neq 1)$；2、1；3、$2x+1$ 或 $-2x-3$；4、$\sqrt{3}$；5、B ；6、　D

7、D；8、 (1) $(-\infty,-1)\cup(-1,3]$；(2) $(-\infty,0)$；9、$f(x)=\frac{2x+1}{3x-7}$；

10、(1) -4，11；(2) a=1 或-2；(3) $(-\infty,-2)\cup(0,1)$

十三、函数关系的建立

【例题解析】

例 1、$s(x)=2x^2-(a+b)x+ab,0<x<b$

例 2、**解析：**设该商品的利润为 y 元，售价为 x 元

由题意得：$y=(x-40)\cdot[50-(x-50)]$，

即 $y=(x-40)\cdot(100-x)=-x^2+140x-4000=-(x-70)^2+900$

∴当商品的售价为 70 元时，商品的利润最大为 900 元。

例 3、解析：　由已知 $y_1=\frac{20}{x}$；y_2=0。 8x（x 为仓库与车站距离），

费用之和 $y=y_1+y_2$=0。 8x+ $\frac{20}{x}\geqslant 2\sqrt{0.8x\cdot\frac{20}{x}}=8$，

当且仅当 0。 8x=$\frac{20}{x}$ 即 x=5 时“=”成立。

例 4、B

例 5. (1)硬土 480，软土 320，全队工期 480；(2)硬土 300 人，软土 200 人

例 6、(1)$1500\times3\%+3000\times10\%+1000\times20\%=545$(元)

(2)每月工资 $y=\begin{cases}\frac{100}{3}m+3500,0<m\leq 45\\ 10m+4550,45<m\leq 345\\ 5m+6275,345<m\leq 400\end{cases}$，单位：元.

【基础练习】

1、解：设底面的另一边长为z(m)，则根据题意有6xz=8000,z=$\frac{4000}{3x}$

池壁造价为a·(2x+2z)·6=12a(x+$\frac{4000}{3x}$)

池底造价为2a·$\frac{8000}{6}=\frac{8000}{3}$a

所以，总造价：y=［12a(x+$\frac{4000}{3x}$)+$\frac{8000}{3}$a］(元)

2、（1）$y=-2x^2+40x-98\left(x\in N^*\right)$；（2）3年后；

（3）方案I：$\frac{y}{x}=40-\left(2x+\frac{98}{x}\right)\le 12$，使用7年后，年平均盈利额达到最大值，工厂共获利114万元；方案II：$y=-2\left(x-10\right)^2+102$，使用10年后，总盈利额达到最大值，工厂共获利114万元。由于盈利额达到的最大值相同，而方案I所用的时间较短，故方案I较为合理。

十四、函数的奇偶性

【例题解析】

例1．(1)　奇函数，证明略；(2)　非奇非偶函数，证明略；(3) 奇函数；

(4) 既是奇函数又是偶函数

例2. 解：当x＞0时，－x＜0，于是$g(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^2-1=-(\frac{1}{2}x^2+1)=-g(x)$

当x＜0时，－x＞0，于是$g(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+1=\frac{1}{2}x^2+1=-(-\frac{1}{2}x^2-1)=-g(x)$

综上可知，　$g(x)$是奇函数.

例3. 解：$\because f(x)=(m-2)x^2+(m-1)x+3$是偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$恒成立，

即$(m-2)(-x)^2+(m-1)(-x)+3=(m-2)x^2+(m-1)x+3$恒成立，

$\therefore 2(m-1)x=0$恒成立，$\therefore m-1=0$，即$m=1$.

例4.奇函数

例5. 【解】方法一：由题意得$f(-2)=(-2)^5+a(-2)^3+b(-2)-8$　①

$f(2)=2^5+a\times 2^3+b\times 2-8$ ② ①+②得 $f(-2)+f(2)=-16$

∵ $f(-2)=10$，∴ $f(2)=-26$

方法二：构造函数 $g(x)=f(x)+8$，则 $g(x)=x^5+ax^3+bx$ 一定是奇函数，又∵ $f(-2)=10$

∴ $g(-2)=18$ 因此 $g(2)=-18$ 所以 $f(2)+8=-18$，即 $f(2)=-26$.

例 6.【解】真命题. 构造 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(-x\right)+f\left(x\right)}{2}$ 为偶函数，$h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{2}$ 为奇函数，显然 $f\left(x\right)=g\left(x\right)+h\left(x\right)$ 得证.

例 7.【证明】令 $x=y=0$，有 $f(0)+f(0)=2f(0)\cdot f(0)$，又 $f(0)\neq 0$，∴可证 $f(0)=1$．令 $x=0$，

∴$f(y)+f(-y)=2f(0)\cdot f(y)\Rightarrow f(-y)=f(y)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

例 8.【证明】定义域 $D=R$ 关于原点对称.

任取 $x\in D$，都有 $f\left(g\left(-x\right)\right)=f\left(-g\left(x\right)\right)=f\left(g\left(x\right)\right)$，所以 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 是偶函数，得证.

【基础练习】

1． A；2． $a+b=4$；3． D；4． －26．5． D．6．奇函数.

7. $f(x)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{-x-1})=\dfrac{1}{x^2-1}$． 8． 0；9. $\left(-2,-1\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(2,3\right)$

10. 解析：由 x_1，$x_2\in$R 且不为 0 的任意性，令 $x_1=x_2=1$ 代入可证，

$f(1)=2f(1)$，∴$f(1)=0$.

又令 $x_1=x_2=-1$，

∴$f[-1\times(-1)]=2f(1)=0$，

∴$(-1)=0$．又令 $x_1=-1$，$x_2=x$，

∴$f(-x)=f(-1)+f(x)=0+f(x)=f(x)$，即 $f(x)$ 为偶函数.

十五、函数的单调性

【例题解析】

例 1. (1) $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增

(2)当 $a>0$, $(-\infty,-\sqrt{a}]$ 和 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增；$[-\sqrt{a},0)$ 和 $(0,\sqrt{a}]$ 上单调递减。

当 $a=0$, R 上单调递增。 当 $a<0$, $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

例 2.证明：单调递增。函数定义域$D=R$。对任意的$x_2>x_1\in R$

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^3-x_1^3\\&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)\\&=(x_2-x_1)[(x_2^2+x_2x_1+\frac{1}{4}x_1^2)+\frac{3}{4}x_1^2]\\&=(x_2-x_1)[(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2+\frac{3}{4}x_1^2]\end{aligned}$$

$\because x_2>x_1$

$\therefore x_2-x_1>0;(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2$与$\frac{3}{4}x_1^2$均大于等于0且不全为0

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$

$\therefore f(x)$在定义域上单调递增

练习：解：任取x_1，$x_2\in(1，+\infty)$，且$x_1<x_2$，则$g(x_1)-g(x_2)=\frac{-2x_1}{x_1-1}-\frac{-2x_2}{x_2-1}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$，由于$1<x_1<x_2$，所以$x_1-x_2<0$，$(x_1-1)(x_2-1)>0$，因此$g(x_1)-g(x_2)<0$，即$g(x_1)<g(x_2)$．故$g(x)$在$(1，+\infty)$上是增函数．

例 3. 解：$(-\infty,-2)$和$(-2,1)$上为↓　$(1,4)$和$(4,+\infty)$上为↑

例 4. (1)当$a=0$时，定义域关于原点对称，且任取$x\in D$，均有$f(x)=f(-x)$，所以$f(x)$为偶函数；当$a\neq 0$时，$f(-a)\neq \pm f(a)$，所以$f(x)$为非奇非偶函数.

(2)任取$x_2>x_1\geq 2$，$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(x_2+x_1-\frac{a}{x_1x_2}\right)>0$

所以$x_2+x_1-\frac{a}{x_1x_2}>0$，即$a<x_1x_2(x_1+x_2)$对于任意的$x_2>x_1\geq 2$恒成立. 所以$a\leq 16$.

练习：1. $[1,+\infty)$；2.答案：$\left[0,\frac{1}{3}\right)$

例 5. B　；　　练习：$m\in[-1,\frac{1}{2})$

例 6. (1)单调递减. 任取$x_2>x_1>0$，取$x=x_2,y=x_1$，则有$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=f(x_2)-f(x_1)$.

因为$x_2>x_1>0$，所以$\frac{x_2}{x_1}>1$，所以$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<0$，可得：$f(x_2)-f(x_1)<0$，即

$f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$ 所以，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减. (2) $\left(0,1\right]\cup\left[4,5\right)$

【基础练习】

1. D； 2．C；3．C；4．A；5． C ；6．$[0,\frac{3}{2}]$；7．③.

8．(1)证明：当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=a-\frac{1}{x}$，设 $0<x_1<x_2$，则 $x_1x_2>0$，$x_2-x_1>0$.

$f(x_1)-f(x_2)=(a-\frac{1}{x_1})-(a-\frac{1}{x_2})=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$.

∴$f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

(2)解：由题意 $a-\frac{1}{x}<2x$ 在$(1,+\infty)$上恒成立，∴ $a<2x+\frac{1}{x}$ 对 $\forall x\in\left(1,+\infty\right)$ 恒成立

∵ $y=2x+\frac{1}{x}$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增 ∴a 的取值范围为$(-\infty,3]$.

9．设 $f(x)$的最小值为 $g(a)$，则只需 $g(a)\geq0$，由题意知，$f(x)$的对称轴为$-\frac{a}{2}$.

(1)当$-\frac{a}{2}<-2$，即 $a>4$ 时，$g(a)=f(-2)=7-3a\geq0$，得 $a\leq\frac{7}{3}$.

又 $a>4$，故此时的 a 不存在.

(2)当$-\frac{a}{2}\in[-2,2]$，即$-4\leq a\leq4$ 时，$g(a)=f(-\frac{a}{2})=3-a-\frac{a^2}{4}\geq0$ 得$-6\leq a\leq2$.

又$-4\leq a\leq4$，故$-4\leq a\leq2$.

(3)当$-\frac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，$g(a)=f(2)=7+a\geq0$ 得 $a\geq-7$.

又 $a<-4$，故$-7\leq a<-4$.

综上得所求 a 的取值范围是$-7\leq a\leq2$.

10. (1)任取 x_1，$x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，则$-x_2\in[-1,1]$，∵$f(x)$为奇函数，

$$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(-x_2\right)=\frac{f\left(x_1\right)+f\left(-x_2\right)}{x_1+\left(-x_2\right)}\left(x_1-x_2\right)$$

由已知得 $\frac{f\left(x_1\right)+f\left(-x_2\right)}{x_1+\left(-x_2\right)}>0$，$x_1-x_2<0$，

∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．∴$f(x)$在$[-1,1]$上单调递增.

(2)∵$f(x)$在$[-1,1]$上单调递增，

$$\therefore \begin{cases} x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x-1} \\ -1\le x+\dfrac{1}{2}\le 1 \\ -1\le \dfrac{1}{x-1}<1 \end{cases} \qquad \therefore -\frac{3}{2}\le x<-1.$$

(3)∵$f(1)=1$，$f(x)$在$[-1,1]$上单调递增．　∴在$[-1,1]$上，$f(x)\le 1$.

问题转化为 $m^2-2am+1\ge 1$，即 $m^2-2am\ge 0$，对 $a\in[-1,1]$成立．

下面来求 m 的取值范围．

设 $g(a)=-2m\cdot a+m^2\ge 0$.

①若 $m=0$，则 $g(a)=0\ge 0$，自然对 $a\in[-1,1]$恒成立．

②若 $m\ne 0$，则 $g(a)$为 a 的一次函数，若 $g(a)\ge 0$，对 $a\in[-1,1]$恒成立，必须 $g(-1)\ge 0$，且 $g(1)\ge 0$，　∴$m\le -2$，或 $m\ge 2$.　∴m 的取值范围是 $m=0$ 或$|m|\ge 2$.