

高二数学 精编教案

目 录

第一讲 平面及其基本性质	2
第二讲 空间直线与直线	6
第三讲 空间直线与平面	10
第四讲 空间平面与平面	13
第五讲 空间直线与平面复习	17
第九讲 多面体	23
第十讲 旋转体	27
第十一讲 几何体的表面积和体积	31
第十二讲 球面距离	36
第十三讲 排列组合	39
第十四讲 二项式定理	46
第十六讲 空间向量	49
第十七讲 概率统计	53
第十八讲 期末复习	57

第一讲 平面及其基本性质

【知识梳理】

知识点一 平面

1. 特征：①无限延展 ②平的（没有厚度），平面是抽象出来的，只能描述，如平静的湖面，不能定义.一个平面把空间分成两部分，一条直线把平面分成两部分.

2. 表示：一般用一个希腊字母 α 、 β 、 γ ……来表示，还可用平行四边形的对角顶点的字母来表示如：平面 α ，平面 AC 等.

3. 画法：通常画平行四边形来表示平面

(1)一个平面：当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成邻边的2倍长，如图1(1).

(2)直线与平面相交，如图1(2)、(3)：

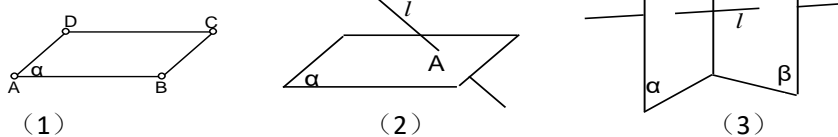


图 1

(3) 两个相交平面：画两个相交平面时，先定位，后交线，邻边依次添，若一个平面的一部分被另一个平面遮住，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画（如图2）.

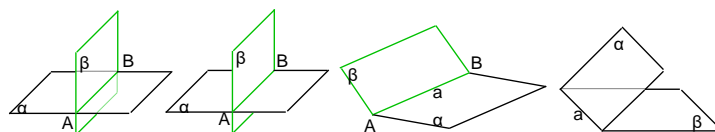


图 2

4.点、线、面的基本位置关系如下表所示：

图形	符号语言	文字语言（读法）
	$A \in a$	点 A 在直线 a 上.
	$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上.
	$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内.
	$A \notin \alpha$	点 A 不在平面 α 内.
	$a \cap b = A$	直线 a 、 b 交于 A 点.
	$a \subset \alpha$	直线 a 在平面 α 内.
	$a \cap \alpha = \emptyset$	直线 a 与平面 α 无公共点.
	$a \cap \alpha = A$	直线 a 与平面 α 交于点 A .
	$\alpha \cap \beta = l$	平面 α 、 β 相交于直线 l .

知识点二 三条公理

人们经过长期的观察和实践，把平面的三条基本性质归纳成三条公理.

公理 1 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

应用：①判定直线在平面内；②判定点在平面内.模式.

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

应用：①确定两相交平面的交线位置；②判定点在直线上.

指出：今后所说的两个平面(或两条直线)，如无特殊说明，均指不同的平面(直线).

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

应用：①确定平面；②证明两个平面重合.

实例：(1)门：两个合页，一把锁；(2)摄像机的三角支架；(3)自行车的撑脚.

知识点三 公理 3 的三条推论

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面.

【例题解析】

例 1、将下列符号语言转化为图形语言：

$$(1) A \in \alpha, B \in \beta, A \in l, B \in l;$$

$$(2) a \subset \alpha, b \subset \beta, a // c, b \cap c = p, \alpha \cap \beta = c.$$

例 2、将下列文字语言转化为符号语言：

(1) 点 A 在平面 α 内，但不在平面 β 内；(2) 直线 a 经过平面 α 外一点 M ；

(3) 直线 l 在平面 α 内，又在平面 β 内。(即平面 α 和 β 相交于直线 l .)

例 3、在平面 α 内有 A, O, B 三点，在平面 β 内有 B, O, C 三点，试画出它们的图形.

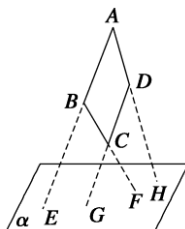
例 4、判断下列命题是否正确。

1. 不共线的三点确定一个平面。()
2. 有三个公共点的两个平面重合。()
3. 三角形一定是平面图形。()
4. 平行四边形一定是平面图形。()
5. 四边形一定是平面图形。()

6. 不共线的四点确定一个平面。()

例 5、求证：三角形是平面图形。

例 6、如图所示，四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel CD$ ， AB, BC, DC, AD (或延长线) 分别与平面 α 相交于 E, F, G, H ，求证： E, F, G, H 必在同一直线上。



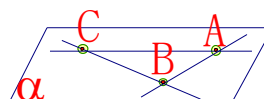
例 7、点 $A \notin$ 平面 BCD ， E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点，若 EH 与 FG 交于 P 。
 (这样的四边形 $ABCD$ 就叫做空间四边形) 求证： P 在直线 BD 上。

例 8、两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一平面内。

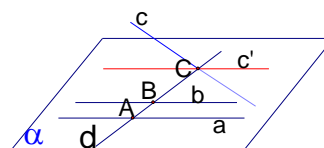
已知：直线 AB, BC, CA 两两相交，交点分别为 A, B, C 。

求证：直

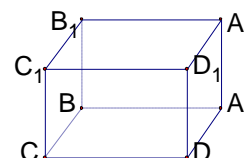
线 AB, BC, CA 共面。



例 9、已知直线 $a \parallel b \parallel c$ ，直线 d 与 a, b, c 分别相交于 A, B, C ，求证： a, b, c, d 四线共面。



例 10、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，① AA_1 与 CC_1 是否在同



一平面内？②点 B, C_1, D 是否在同一平面内？③画出平面 AC_1 与平面 BC_1D 的交线，平面 ACD_1 与平面 BDC_1 的交线。

【训练题】

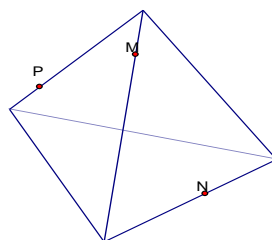
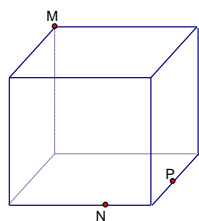
1. 在下列六组条件中：

- (1) 空间三个点；(2) 空间一条直线与一个点；(3) 空间两条相交直线；
- (4) 三条平行直线与第四条直线都相交；(5) 两两相交且不交于同一点的三条直线；
- (6) 三条直线中的一条与其余两条直线分别相交。

能确定一个平面的条件共有_____个。

2. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等，这样的平面 α 共有_____个。

3. 画出下列几何体中过三点 M, N, P 的截面：



4. 设不全等的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 不在同一平面内，且 $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. 求证： AA_1, BB_1, CC_1 三线共点.

5. 已知： a, b, c, d 是不共点且两两相交的四条直线，求证： a, b, c, d 共面.

第二讲 空间直线与直线

【知识梳理】

1. 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。
2. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。
3. 空间两条直线的位置关系：平行、相交、异面。
4. 异面直线所成角的范围： $(0, \frac{\pi}{2}]$
5. 异面直线之间的距离：异面直线公垂线段的长度。

知识点一 平行直线

1. 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

符号表示：
$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ b // c \end{array} \right\} \Rightarrow a // c$$

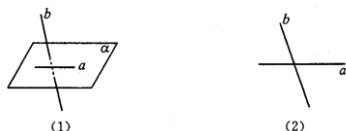
2. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

知识点二 异面直线

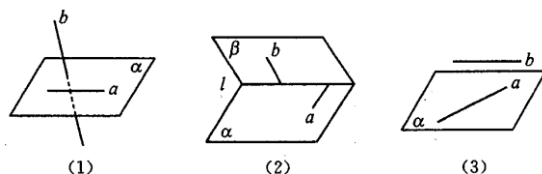
1. 异面直线

- (1)定义：不同在任何一个平面内的两直线叫做异面直线。
- (2)特点：既不相交，也不平行。
- (3)理解：①“不同在任何一个平面内”，指这两条直线永不具备确定平面的条件，因此，异面直线既不相交，也不平行，要注意把握异面直线的不共面性。
②“不同在任……”也可以理解为“任何一个平面都不可能同时经过这两条直线”。
③不能把异面直线误解为分别在不同平面内的两条直线为异面直线。也就是说，在两个不同平面内的直线，它们既可以是平行直线，也可以是相交直线。

2. 异面直线的画法：为了充分显示出它们既不平行又不相交的特点，常常需要以辅助平面作为衬托，以加强直观性，如下图(1)，若画成如下图(2)的情形，就分不开了，千万不能画成(2)的图形。



画平面衬托时，通常画成下图中的情形。



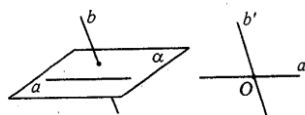
3. 异面直线的判定

- (1)异面直线判定定理：过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线。
- (2)判定两条直线为异面直线的常用方法有：
 - ①定义法：不同在任一平面内的两条直线。
 - ②定理法：过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线为异面直线。

- ③推论法：一条异面直线上两点与另一条异面直线上两点所连成的两条直线为异面直线。
 ④反证法：反证法是证明立体几何问题的一种重要方法，证明步骤有三步：一是提出与结论相反的假设；二是由此假设推出与题目条件或某一公理、定理或某一已被证明是正确的命题相矛盾结果；三是推翻假设，从而肯定与假设相反的结论，即命题的结论成立，

4、异面直线所成的角

a 与 b 是异面直线，经过空间任意一点 O ，作直线 $a' // a$ ， $b' // b$ ，直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a ， b 所成的角。如下图所示。



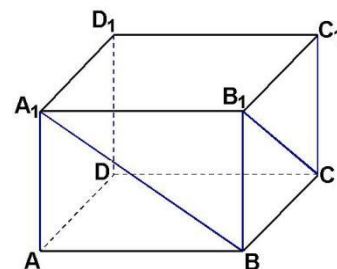
- (1) 异面直线所成角 θ 的范围是 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ；
 (2) 为了求异面直线 a ， b 所成的角，可以在空间中任取一点 O ，为了简便，点 O 常常取这里的点通常选择特殊位置的点，如线段的中点或端点或异面直线连线中点，也可以是异面直线中某一条上的一个特殊点。将这个角放入某个三角形中计算这个角的大小，若该三角形是直角三角形、等腰三角形等特殊三角形，便易求此角的大小。
 (3) 我们规定：两条平行直线所成的角为 0° 角，两条相交直线所成的角为这两条相交直线所成的四个角中的锐角（或直角），因此在空间中的两条直线所成的角的范围为 $(0^\circ, 90^\circ]$ ；特别地，若两异面直线所成角为 90° ，则称两异面直线互相垂直；
 (4) 求异面直线所成角的一般步骤是：
 ①构造 恰当地选择一个点，用平移法构造异面直线所成的角。
 ②证明 证明①中所作出的角就是所求异面直线所成的角，
 ③计算 通过解三角形（常用余弦定理）等知识，求①中所构造的角的大小，
 ④结论 假如所构造的角的大小为 α ，若 $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ，则 α 即为所求异面直线所成角的大小；若 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，则 $180^\circ - \alpha$ 即为所求。

【例题解析】

例 1. A 是 $\triangle BCD$ 平面外的一点， E 、 F 分别是 BC 、 AD 的中点，

- (1) 求证：直线 EF 与 BD 是异面直线；
 (2) 若 $AC \perp BD$ ， $AC=BD$ ，求 EF 与 BD 所成的角。

例 2. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DA = DC = 4$ ， $DD_1 = 3$ ，求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）。

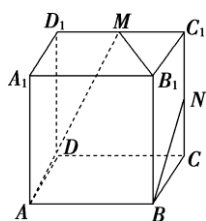


例 3. 直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$, $\angle BCA=90^\circ$, 点 D_1, F_1 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC=CA=CC_1$, 求 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值。

例 4. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=a, BC=b, AA_1=c$, 且 $a>b$, 求:

- (1) 下列异面直线之间的距离: AB 与 CC_1 ; AB 与 A_1C_1 ; AB 与 B_1C ;
- (2) 异面直线 D_1B 与 AC 所成角的余弦值。

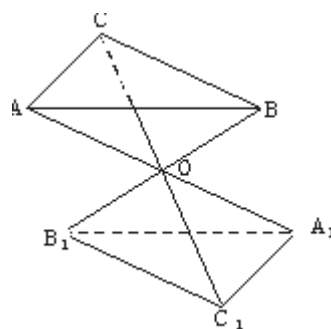
例 5. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为棱 C_1D_1, C_1C 的中点, 有以下四个结论:



- ① 直线 AM 与 CC_1 是相交直线;
 - ② 直线 AM 与 BN 是平行直线;
 - ③ 直线 BN 与 MB_1 是异面直线;
 - ④ 直线 AM 与 DD_1 是异面直线.
- 其中正确的结论为_____。(注: 把你认为正确的结论的序号都填上)

例 6. 如图, 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三对对应顶点的连线 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点 O ,

且 $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{3}$, 试求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$ 的值。



例 7. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2a, AA_1=a$, E, F 分别是

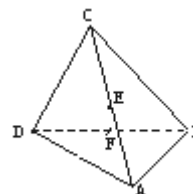
A_1B_1 和 BB_1 的中点, 求: (1) EF 与 AD_1 所成角的余弦值;

(2) AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值。

【训练题】

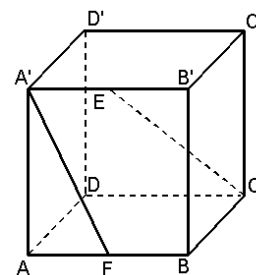
1. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， O 是底面 $ABCD$ 的中心， E 、 F 分别是 CC_1 、 AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于_____

2. 如图，四面体 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AC 、 BD 的中点，若 $CD=2AB=2$ ， $EF \perp AB$ ，则 EF 与 CD 所成的角等于_____.



3. (2007 年上海高考题) 在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α 、 β 是两个相交平面，空间两条直线 l_1 、 l_2 在 α 上的射影是直线 s_1 、 s_2 ， l_1 、 l_2 在 β 上的射影是直线 t_1 、 t_2 . 用 s_1 与 s_2 ， t_1 与 t_2 的位置关系，写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件：_____.

4. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， E 、 F 分别是 $A'B'$ 和 AB 的中点，求异面直线 $A'F$ 与 CE 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示).



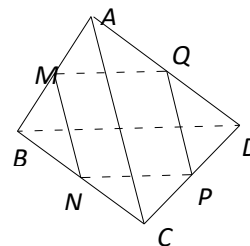
第三讲 空间直线与平面

【知识梳理】

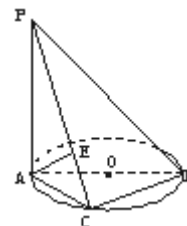
1. 直线在平面内、直线和平面相交、直线和平面平行
2. (1) 判定定理：如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。
(2) 性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。
3. (1) 判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于一个平面，那么这两个平面平行。
(2) 性质定理：
①如果两个平面平行，那么其中一个平面内的直线平行于另一个平面。
②如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。
4. (1) 定义：如果一条直线 l 和一个平面 α 相交，并且和平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 和平面 α 互相垂直。记作： $l \perp \alpha$ 。
(2) 判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。
(3) 性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。
5. 直线与平面所成角：设直线与平面所成角 θ ：
(1) 直线与平面平行或直线在平面内，则 $\theta = 0$ ；
(2) 直线与平面垂直，则 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ；
(3) 直线是平面的斜线，则 θ 定义为平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

【例题解析】

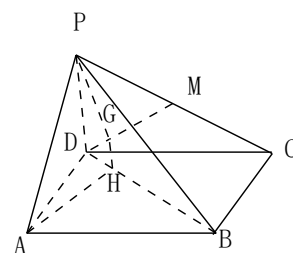
1. 如图，已知 M 、 N 、 P 、 Q 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点。求证：(1) 线段 MP 和 NQ 相交且互相平分；(2) $AC \parallel$ 平面 MNP ， $BD \parallel$ 平面 MNP 。



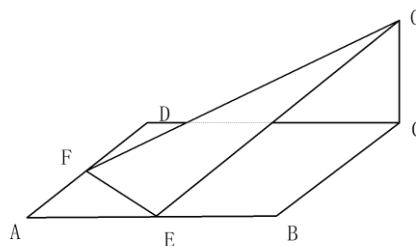
2. 已知 $PA \perp \odot O$ 所在的平面， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上任意一点，过 A 点作 $AE \perp PC$ 于点 E ，求证： $AE \perp$ 平面 PBC 。



3. 已知 $ABCD$ 是四边形，点 P 是平面 $ABCD$ 外一点， M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G ，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH ，求证： $AP \parallel GH$ 。

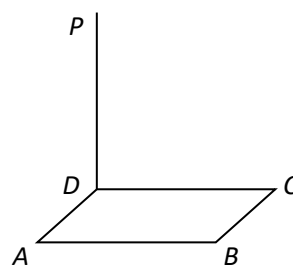


4. 已知 $ABCD$ 为边长是 4 的正方形， E, F 分别是 AB, AD 的中点， GC 垂直于 $ABCD$ 所在的平面，且 $GC=2$ ，求 B 到平面 EFG 的距离。



5. 在四面体 $ABCD$ 中， $AB = AC = AD = BC = 1$ ， $CD = \sqrt{2}$ ，且 $\angle BCD = 90^\circ$ ，求：
 (1) A 到平面 BCD 的距离；
 (2) AC 与平面 BCD 所成的角。

6. 已知边长为 6 的正方形 $ABCD$ 所在平面外一点 P ， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD=8$ ，
 (1) 连接 PB, AC ，证明： $PB \perp AC$ ；
 (2) 连接 PA ，求 PA 与平面 PBD 所成的角的大小；
 (3) 求点 D 到平面 PAC 的距离。



【训练题】

1. 设直线 m, n 和平面 α, β , 则下列命题中, 正确的是 ()

(A) $m // n, m \subset \alpha, n \subset \beta \Rightarrow \alpha // \beta$ (B) $m \perp \alpha, m \perp n, n \subset \beta \Rightarrow \alpha // \beta$

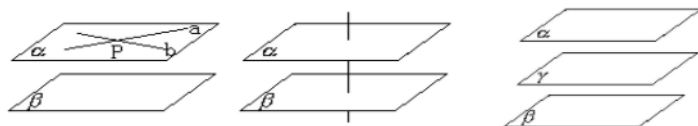
(C) $m \perp n, m // \alpha \Rightarrow n \perp \alpha$ (D) $m \perp \alpha, m // n \Rightarrow n \perp \alpha$
2. 已知 a, b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a, b 在 α 上的射影有可能是
 ①两条平行直线; ②两条互相垂直的直线; ③同一条直线; ④一条直线及其外一点.
 在上面结论中, 正确结论的编号是_____. (写出所有正确结论的编号)
3. 四面体 $ABCD$ 中, $AC = BD, E, F$ 分别为 AD, BC 的中点, 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$,
 $\angle BDC = 90^\circ$, 求证: $BD \perp$ 平面 ACD .
4. 设 PA, PB, PC 是从点 P 引出的三条射线, 每两条的夹角都等于 60° , 则直线 PC 与平面 APB 所成角的余弦值是_____.
5. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2, AA_1 = 1$, 则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为_____.
6. 已知线段 AB 不在平面 α 内, A, B 两点到平面 α 的距离分别是 1 和 3, 那么线段 AB 的中点到平面 α 的距离是_____.
7. 山脚平地上有一条笔直的公路, 在公路上 A, B, C 三点依次测得山顶 P 的仰角为 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 已知 $AB = BC = 1km$, 求山高 PH 。

第四讲 空间平面与平面

【知识梳理】

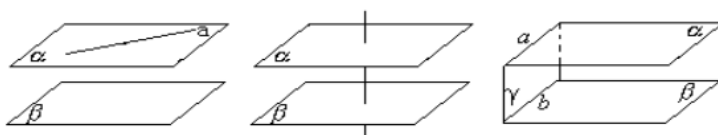
1. 平面与平面平行（没有公共点）

(1)判定定理



$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a // \beta, b // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta, \quad \left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$$

(2)性质定理



$$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \beta, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ l \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \beta, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

2. 平面与平面垂直

$$(1) \text{判定定理: } \left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta;$$

$$(2) \text{性质定理: } \left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = l \\ a \subset \alpha, a \perp l \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta$$

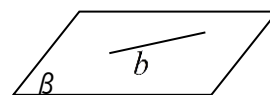
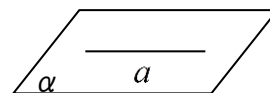
3. 二面角：当两个平面相交时，它们的交线 l 将各平面分割成两个半平面，由两个半平面 α 、 β 及交线 l 所组成的空间图形叫做二面角，记作 $\alpha-l-\beta$ ，交线 l 叫做二面角的棱，两个半平面 α 、 β 叫做二面角的面。

4. 二面角的平面角：在二面角的棱 AB 上任取一点 O ，过 O 分别在面 α 和 β 内作棱 l 的垂线 OM 和 ON ，则射线 OM 和 ON 所成的角叫做二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角。

【例题解析】

例 1. 已知直线 a 、 b 异面，平面 α 过 a 且平行于 b ，平面 β 过 b 且平行于 a ，

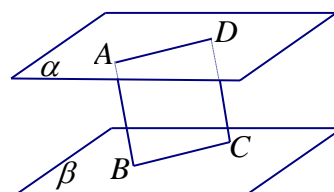
求证： $\alpha // \beta$



例 2. 夹在两个平行平面间的两条平行线段相等。

已知： $\alpha \parallel \beta$ ， AB, CD 是夹在两个平行平面 α, β 间的平行线段，

求证： $AB = CD$ 。



例 3. 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $\beta \parallel \gamma$ ，则 $\alpha \parallel \gamma$ 。

证明：在平面 α 内取两条相交直线 a, b ，

例 4. 关于直线 m, n 及平面 α, β ，下列命题中正确的是（ ）

- A. 若 $m \parallel \alpha, \alpha \cap \beta = n$ ，则 $m \parallel n$ B. 若 $m \perp \alpha, m \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel n$ D. 若 $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp \beta$

例 5. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，过对角线 BD_1 作平面 α 交棱 AA_1 于点 E ，交棱 CC_1 于点 F ，则：① 四边形 BFD_1E 一定是平行四边形；② 四边形 BFD_1E 有可能为正方形；

③ 四边形 BFD_1E 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形；

④ 平面 BFD_1E 有可能垂直于平面 BB_1D_1D 。其中所有正确结论的序号为（ ）

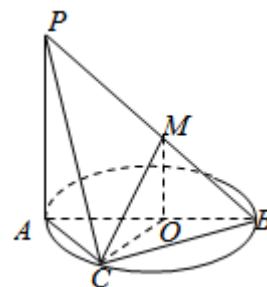
- A. ①② B. ②③④ C. ①④ D. ①③④

例 6. 如图, AB 为圆 O 的直径, 点 C 在圆周上 (异于点 A, B), 直线 PA 垂直于圆 O 所在的平面,

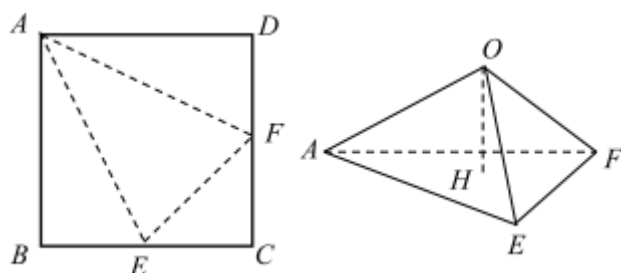
点 M 是线段 PB 的中点, 有以下四个命题:

- ① $MO \parallel$ 平面 PAC ; ② $PA \parallel$ 平面 MOB ;
 ③ $OC \perp$ 平面 PAC ; ④ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC 。

其中正确的命题的序号是_____。



例 7. 如图, E, F 分别为边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 的中点, 沿图中虚线折起, 使得 B, C, D 三点重合于点 O , 点 O 在平面 AEF 上的射影 H .



- (1) 求证: 面 $OEF \perp$ 面 OEA ;
- (2) 求证: 点 H 是 $\triangle AEF$ 的垂心;

例 8. 点 A 是平面 BCD 外一点, $AB = AC = AD = BC = CD = BD$, 求二面角 $B-AC-D$ 的大小。

例 9. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 内有一点 P , 若 P 到平面 α, β 的距离分别是 5, 8, 且 P 在平面 α, β 的内的射影的距离为 7, 求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小。

例 10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB=4$, $AC=3$, 平面 ABC 外一点 P 在平面 ABC 内的射影是 AB 的中点 M , 二面角 $P-AC-B$ 的大小为 45° 。求:

- (1) 二面角 $P-BC-A$ 的大小;
- (2) 求二面角 $C-PB-A$ 的大小。

例 11. 已知 E 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 CC_1 的中点, 求平面 A_1BE 与平面 $ABCD$ 所成角。

【训练题】

1. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 θ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$), $AB \subsetneq \alpha$, $CD \subsetneq \beta$, 且 $AB \perp l$, $CD \perp l$, 若 AB 与 CD 所成的角为 φ , 则 ()

- (A) $\varphi = \theta$ (B) $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ (C) $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ (D) $\varphi = \pi - \theta$

2. 设锐二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 θ , m 是 α 内异于 l 的一条直线, 则 m 与 β 所成角的范围是_____。

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 A_1BD 与平面 C_1BD 所成角的余弦值等于_____。

4. 已知 E, F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC, CC_1 的中点, 则截面 $AEFD_1$ 与底面 $ABCD$ 所成二面角的正弦值是_____。

5. 设 S 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, 平面 SAB, SBC, SCA 与 $\triangle ABC$ 所在平面所成的二面角都相等, 问点 S 在平面 ABC 内的射影是 $\triangle ABC$ 的_____心。

6. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 60° , 面 α 内的一点 A 到棱 l 的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 A 到面 β 的距离是_____。

7. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ , 在平面 α 内若有一条射线 AB 与棱 l 成锐角 δ , 与平面 β 成角 γ , 则必有 ()

- (A) $\sin \theta \sin \delta = \sin \gamma$ (B) $\sin \theta \sin \delta = \cos \gamma$
(C) $\cos \theta \cos \delta = \sin \gamma$ (D) $\cos \theta \cos \delta = \cos \gamma$

8. 山坡与水平面成 30° 角, 坡面上有一条与坡角水平线成 30° 角的直线小路, 某人沿小路上坡走了一段路程后升高了 100 米, 则此人行走的路程为_____米。

第五讲 空间直线与平面复习

【知识梳理】

一、异面直线所成的角

等角定理及其推论

定理:若一个角的两边和另一个角的两边分别平行,并且方向相同,则这两个角相等.

推论:若两条相交直线和另两条相交直线分别平行,则这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

异面直线所成的角

(1)定义: a 、 b 是两条异面直线,经过空间任意一点 O ,分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$,则 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

(2)取值范围: $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$.

(3)求解方法

①根据定义,通过平移,找到异面直线所成的角 θ ;

②解含有 θ 的三角形,求出角 θ 的大小.

二、直线和平面所成的角

(1)定义 和平面所成的角有三种:

(i)垂线 面所成的角 的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角.

(ii)垂线与平面所成的角 直线垂直于平面,则它们所成的角是直角.

(iii)一条直线和平面平行,或在平面内,则它们所成的角是 0° 的角.

(2)取值范围: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

(3)求解方法

①作出斜线在平面上的射影,找到斜线与平面所成的角 θ .

②解含 θ 的三角形,求出其大小.

三、二面角及二面角的平面角:

(1)半平面 直线把平面分成两个部分,每一部分都叫做半平面.

(2)二面角 一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱,这两个平面叫做二面角的面,即二面角由半平面—棱—半平面组成.

二面角的平面角 θ 的取值范围是 $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$

(3)二面角的平面角

①以二面角棱上任意一点为端点,分别在两个面内作垂直于棱的射线,这两条射线所组成的角叫做二面角的平面角.

②二面角的平面角具有下列性质:

(i)二面角的棱垂直于它的平面角所在的平面,即 $AB \perp$ 平面 PCD .

(ii)从二面角的平面角的一边上任意一点(异于角的顶点)作另一面的垂线,垂足必在平面角的另一边(或其反向延长线)上.

(iii)二面角的平面角所在平面与二面角的两个面都垂直,即平面 $PCD \perp \alpha$, 平面 $PCD \perp \beta$.

③找(或作)二面角的平面角的主要方法.

(i)定义法 (ii)垂面法 (iii)三垂线法 (IV)根据特殊图形的性质

(4)求二面角大小的常见方法

①先找(或作)出二面角的平面角 θ ,再通过解三角形求得 θ 的值.

②利用面积射影定理 $S' = S \cdot \cos \alpha$

其中 S 为二面角一个面内平面图形的面积, S' 是这个平面图形在另一个面上的射影图形

的面积, α 为二面角的大小.

四、点到平面的距离

(1) 定义: 平面外一点引一个平面的垂线, 这个点和垂足间的距离叫做点到这个平面的距离.

(2) 求点面距离常用的方法:

1) 直接利用定义求

① 找到(或作出)表示距离的线段;

② 抓住线段(所求距离)所在三角形解之.

2) 利用两平面互相垂直的性质. 即如果已知点在已知平面的垂面上, 则已知点到两平面交线的距离就是所求的点面距离.

3) 体积法其步骤是: ① 在平面内选取适当三点, 和已知点构成三棱锥; ② 求出此三棱锥的体积 V 和所取三点构成三角形的面积 S ; ③ 由 $V = \frac{1}{3} S \cdot h$, 求出 h 即为所求. 这种方法的优点是不必作出垂线即可求点面距离. 难点在于如何构造合适的三棱锥以便于计算.

4) 转化法将点到平面的距离转化为(平行)直线与平面的距离来求.

二、直线和平面的距离

二、直线和平面的距离

(1) 定义一条直线和一个平面平行, 这条直线上任意一点到平面的距离, 叫做这条直线和平面的距离.

(2) 求线面距离常用的方法

① 直接利用定义求证(或连或作)某线段为距离, 然后通过解三角形计算之.

② 将线面距离转化为点面距离, 然后运用解三角形或体积法求解之.

③ 作辅助垂直平面, 把求线面距离转化为求点线距离.

三、平行平面的距离

(1) 定义 一个平行平面同时垂直的直线, 叫做这两个平行平面的公垂线. 公垂线夹在两个平行平面间的部分, 叫做这两个平行平面的公垂线段. 两个平行平面的公垂线段的长度叫做这两个平行平面的距离.

(2) 求平行平面距离常用的方法

① 直接利用定义求

证(或连或作)某线段为距离, 然后通过解三角形计算之.

② 把面面平行距离转化为线面平行距离, 再转化为线线平行距离, 最后转化为点线(面)距离, 通过解三角形或体积法求解之.

四、异面直线的距离

(1) 定义 一条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度, 叫做两条异面直线的距离.

任何两条确定的异面直线都存在唯一的公垂线段.

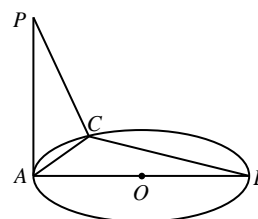
【例题解析】

1. 下列四个命题中真命题是

()

- (A) 同垂直于一直线的两条直线互相平行;
- (B) 过空间任一点与两条异面直线都垂直的直线有且只有一条;
- (C) 底面各边相等、侧面都是矩形的四棱柱是正四棱柱;
- (D) 过球面上任意两点的大圆有且只有一个.

2. 如图, AB 是圆 O 的直径, $PA \perp$ 平面圆 O , C 为圆周上一点, 若 $AB = 5, AC = 2$, 则 B 点到平面 PAC 的距离为_____.



3. 空间四边形 $ABCD$ 的各边与两条对角线的长都为 1, 点 P 在边 AB 上移动, 点 Q 在边 CD 上移动, 则点 P, Q 的最短距离为_____.

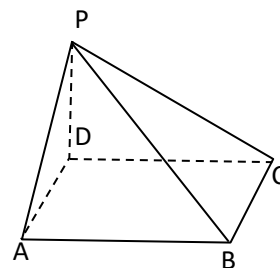
提示: 联结 AB, CD 的中点, 所得线段恰为异面直线 AB, CD 的公垂线

4. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, 且 $PD=a$, $PD \perp$ 面 $ABCD$

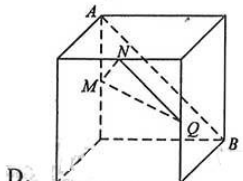
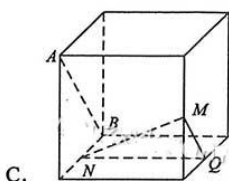
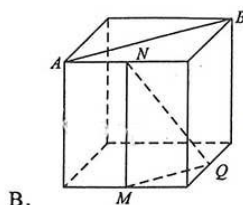
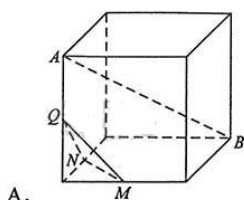
(1) 求: 直线 PB 与 PAD 所成角

(2) 求: 直线 PD 与 PAB 所成角

(3) 求: 直线 PA 与 PBC 所成角.



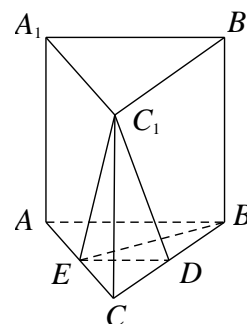
5. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直接 AB 与平面 MNQ 不平行的是 ()



6. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB=BC$.

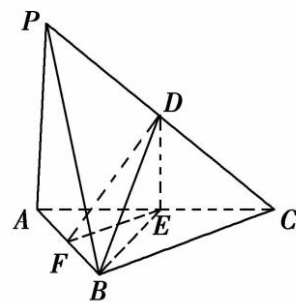
求证: (1) $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 ;

(2) $BE \perp C_1E$.



- 7、如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， D, E, F 分别为棱 PC, AC, AB 的中点. 已知 $PA \perp AC$ ，
 $PA = 6, BC = 8, DF = 5$.

求证：(1) 直线 $PA \parallel$ 平面 DEF ；(2) 平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .



- 8、已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等， E 是线段 AB 上的点（不含端点），设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1 ， SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2 ，二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 ，则 ()

A. $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$ B. $\theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1$ C. $\theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_2$ D. $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_1$

- 9、已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$BC = CC_1 = 1$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

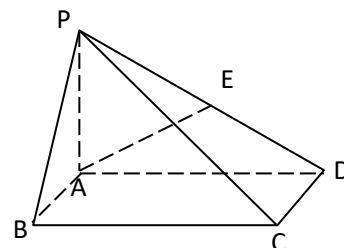
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 如图，在底面是矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA=AB=1$ ， $BC=2$.

(1) 求 PC 与平面 PAD 所成角的大小；

(2) 若 E 是 PD 的中点，求异面直线 AE 与 PC 所成角的大小；

(3) 在 BC 边上是否存在一点 G ，使得 D 点到平面 PAG 的距离为 $\sqrt{2}$ ，若存在，求出 BG 的值；若不存在，请说明理由.

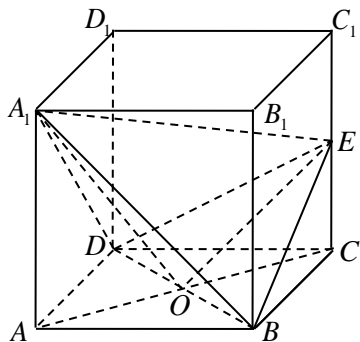


- 11、棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别是棱 AA_1 和 CC_1 的中点， G 是 A_1C_1 的中点。(1) 求直线 B_1D_1 和平面 BFD_1E 所成角的大小；(2) G 到平面 BFD_1E 的距离.

12、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 CC_1 的中点,

(2)求截面 A_1BD 和截面 EBD 所成的二面角的大小;

(3)求平面 A_1BE 和底面 $ABCD$ 所成角二面角的大小.



【训练题】

1、设四面体的六条棱的长分别为 $1, 1, 1, 1, \sqrt{2}$ 和 a , 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \sqrt{2})$ B. $(0, \sqrt{3})$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(1, \sqrt{3})$

2、三棱锥 $A - BCD$, $AB = a, CD = b$, $\angle ABD = \angle BDC$, M, N 分别为 AD, BC 的中点,

P 为 BD 上一点, 则 $MP + NP$ 的最小值是_____。

3、到两互相垂直的异面直线的距离相等的点

- (A) 只有 1 个 (B) 恰有 3 个
(C) 恰有 4 个 (D) 有无穷多个

4. 已知动点 P 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 BB_1C_1C 中, 且满足 $\angle PD_1D = \angle BD_1D$,

则动点 P 的轨迹是 () 的一部分 ()

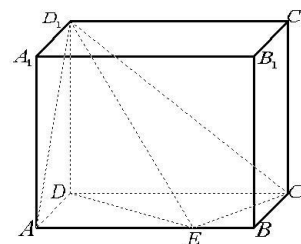
- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

5、在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB_1 \perp B_1C_1$. 求证: (1) $AB \parallel$ 平面

A_1B_1C ; (2) 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .

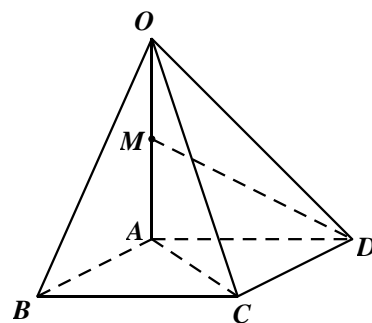
6. 若正方形 $ABCD$ 所在的平面与正方形 $ABEF$ 所在的平面成 60° 的角, 则一面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值为_____;

7. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD=AA_1=1$, $AB=2$, 点 E 是 AB 上的动点,
- (1) 若直线 D_1E 与 EC 垂直, 请你确定点 E 的位置, 并求出此时异面直线 AD_1 与 EC 所成的角;
- (2) 在 (1) 的条件下求二面角 D_1-EC-D 的大小。



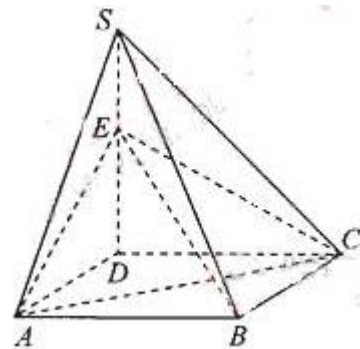
8. 已知 PC 垂直 $Rt\triangle ABC$ 所在平面, $AC \perp BC$, $CD \perp PB$ 于 D 。
- (1) 求证: $AD \perp PB$;
- (2) 若 PB 与平面 ABC 成 60° 角, $PC = AC$, 求 AD 与平面 ABC 所成角的大小。

9. 如图, 已知 $ABCD$ 是底面边长为 2 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $OA \perp$ 底面 $ABCD$, $OA = 2$, M 为 OA 的中点。
- (1) 求异面直线 MD 与 OC 所成角的大小;
- (2) 求直线 OB 与平面 OAC 所成角的大小。



10. 如图, 四棱锥 $S=ABCD$ 的底面是正方形, $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD=AD=a$, 点 E 是 SD 上的点, 且 $DE = \lambda a$ ($0 < \lambda \leq 1$).

- (I) 求证: 对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, 都有 $AC \perp BE$;
- (II) 若二面角 $C-AE-D$ 的大小为 60° , 求 λ 的值。



第九讲 多面体

【知识梳理】

一. 棱柱

有两个面平行，其余各面都是四边形，且任意相邻的两个四边形的公共边都互相平行的多面体叫做棱柱

棱柱的互相平行的两个面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**，相邻两个侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**，底面多边形的顶点叫做**棱柱的顶点**，不在同一个面上的两个顶点的连线叫做棱柱的对角线。两个底面间的距离叫做**棱柱的高**。

侧棱和底面不垂直的棱柱叫做**斜棱柱**，侧棱和底面垂直的棱柱叫做**直棱柱**，底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**。

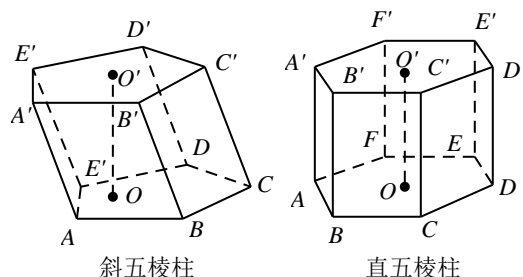


图9-1

棱柱的性质：

- (1) 棱柱的侧面都是平行四边形；
- (2) 棱柱的底面及平行于底面的截面是全等的多边形。

直棱柱的性质：

- (1) 直棱柱的侧面都是矩形；
- (2) 直棱柱的侧棱与高相等；
- (3) 正棱柱的侧面都是全等的矩形。

底面是 n 边形的棱柱叫做 n 棱柱，底面是平行四边形的棱柱叫做**平行六面体**，底面是矩形的直棱柱叫做**长方体**，所有棱长都相等的长方体叫做**正方体**（参见图 9-2）。

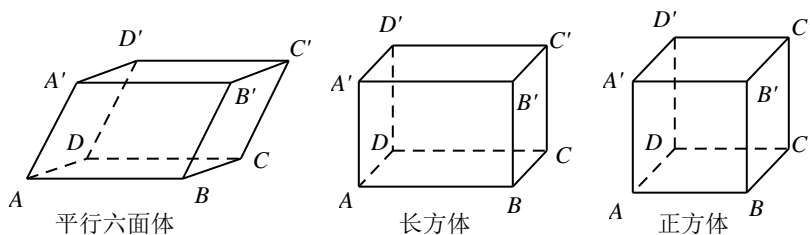


图9-2

二、棱锥

有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形的多面体叫做**棱锥**。棱锥的多边形面叫做**棱锥的底面**，其余各三角形叫做棱锥的侧面，相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**，各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点，顶点到底面的距离叫做**棱锥的高**

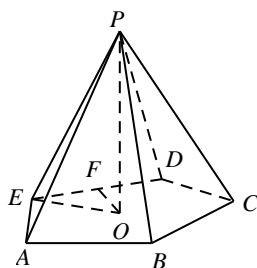


图9-7

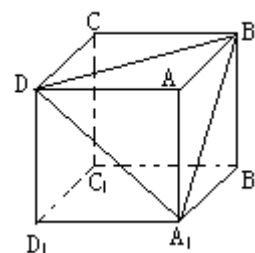
底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面中心的棱锥叫做**正棱锥**。

著名数学家欧拉对正多面体进行了研究，发现了多面体的顶点数、面数、棱数间的关系。简单多面体的顶点数 V ，面数 F ，棱数 E ，恒有下面的关系式： $V + F - E = 2$ 。

【例题解析】

1、过正方体的每三个顶点都可以确定一个平面，其中能与这个正方体的 12 条棱所成角都相等的不同平面有几个？

2、长方体一个顶点上三条棱的长分别为 a, b, c (a, b, c 两两不等)，一条对角线为 AB ，长方体的表面上 A, B 两点间的最短路程为



$\sqrt{a^2 + (b+c)^2}$ ，则 a, b, c 的大小关系是_____。

3、 $ABCD - A'B'C'D'$ 为正方体。任作平面 α 与对角线 AC' 垂直，使得 α 与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为 S ，周长为 l 。则 ()

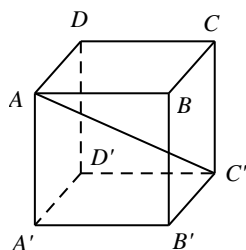


图9-5

- A. S 为定值， l 不为定值
- B. S 不为定值， l 为定值
- C. S 与 l 均为定值
- D. S 与 l 均不为定值

4、直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中，平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，且 $AC = \sqrt{3}A_1B_1$ ，则 AC 与平面 A_1BC 所成的角 θ 的取值范围是_____。

- 5、正六棱锥的底面周长为 24，侧面与底面所成角为 60° ，求：(1) 棱锥的高；(2) 斜高；(3) 侧棱长；(4) 侧棱与底面所成角。

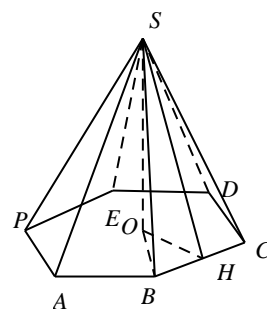


图9-8

- 6、正四棱锥 $P-ABCD$ 棱长均为 13， M ， N 分别是 PA ， BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$ 。

- (1) 求证：直线 $MN \parallel$ 平面 PBC ；
 (2) 求直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦。

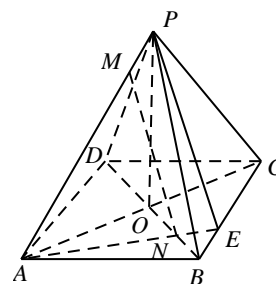


图9-9

- 7、在正三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=a$ ， $PA=2a$ ，过 A 作平面分别交平面 PBC 于 DE 。当截面 $\triangle ADE$ 的周长最小时， $S_{\triangle ADE} =$ _____， P 到截面 ADF 的距离为 _____。

【训练题】

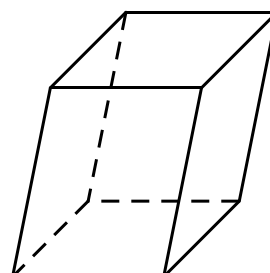
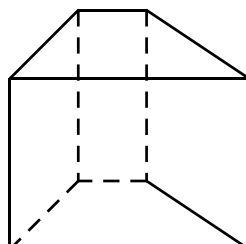
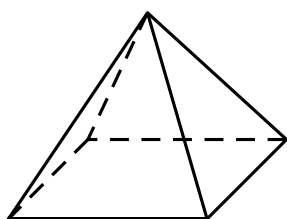
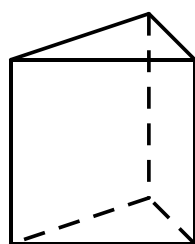
1. 请配对下列多面体的名称与图像与并连线：

直四棱柱

正四棱锥

平行六面体

正三棱柱



2. 长方体是 _____。(写出所有正确选项的序号)

- ①直四棱柱；②平行六面体；③正四棱柱；④正方体；⑤直平行六面体。

3. 判断下列说法是否正确：

- (1) 有两个相邻的侧面是矩形的棱柱是直棱柱()；
 (2) 正四棱柱是正方体()；
 (3) 底面是正多边形的棱锥是正棱锥()。

4. 长方体从同一顶点出发的三条棱长分别为 3, 4, 5, 则长方体的对角线长为_____.

5. 已知长方体的一条对角线与其具有相同顶点的三条棱的夹角分别为 α, β, γ , 则 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma =$ _____.

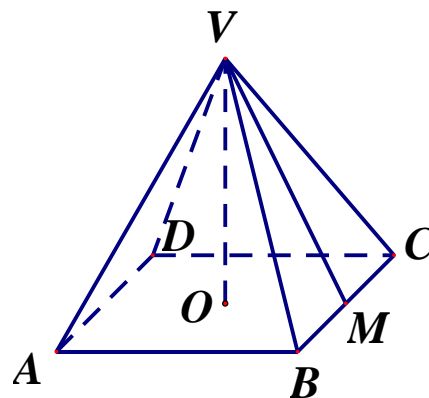
6. 四棱柱集合 A , 平行六面体集合 B , 长方体集合 C , 正四棱柱集合 D , 正方体集合 E 之间有怎样的包含关系? 试用集合文氏图表示出来.

7. 画出一个底面边长 3cm , 高 2cm 的正四棱柱.(要求: 尽可能直观)

8. 底面是菱形的直棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 它的对角线 B_1D 和 A_1C 的长分别是 9cm 和 15cm , 侧棱 AA_1 的长是 5cm , 求这个直棱柱的底面边长.

9. 已知正四棱锥 $V - ABCD$, 底面面积为 16, 一条侧棱长为 $2\sqrt{11}$.

- (1) 求异面直线 VA, DC 所成角的大小;
- (2) 求侧棱 VB 及斜高 VM 分别与底面所成角的大小.



10. “所有边长都相等的三棱锥”被称为正四面体.

- (1) 你认为这样命名的理由大致是什么?
- (2) 设计一个平面图形, 使它能够折成一个正四面体;
- (3) 计算棱长为 1 的正四面体的高.

第十讲 旋转体

【知识梳理】

一. 旋转体

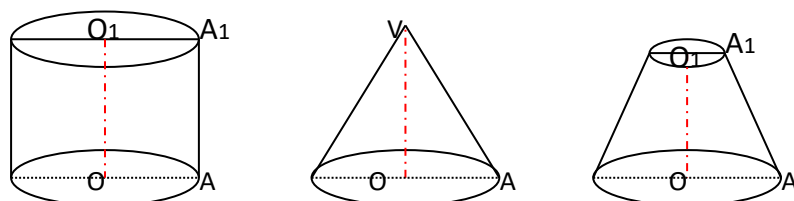
定义：一条平面曲线（包括直线）绕它所在的平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫旋转面。这线叫旋转轴。无论旋转到什麼位置这条曲线叫旋转面的母线。封闭的旋转面围成的几何体叫旋转体。旋转面的轴叫旋转体的轴。

二. 几种常见的旋转体

定义：矩形绕一边旋转一周所围成的几何体叫圆柱。

绕一直角边旋转一周所围成的几何体叫圆锥

圆绕它的直径旋转一周所围成的几何体叫球。



- 注意：**
- (1) 垂直于轴的线段绕轴旋转一周形成圆面。
 - (2) 与轴相交的直线绕轴旋转一周形成圆锥面。
 - (3) 与轴平行的直线绕轴旋转一周形成圆柱面。

圆台（不讲）

2. 性质

	圆 柱	圆 锥	圆 台	球
底 面	平行且全等的圆	圆 面	相似的.两个圆面	
轴 线	过底面圆心且垂直底面	过顶点和底面圆心垂直于底面	过上下底面圆心且垂直底面	过球心
母 线	平行且相等且垂直于底面	相交于一点	延长线交于一点	大圆(过球心) 小圆(不过球心)
轴 截 面	全等的矩形,两边是母线,另两边是两底直径	全等的等腰三角形	全等的等腰梯	大圆
平行于底面的截面	全等的圆与底面相等	相似的圆（比例关系）	圆	球心和截面圆圆心连线垂直截面
侧面展开图	矩形	扇形	扇环	

【例题解析】

1、已知圆柱的底面圆半径是 r ，用一个平行于轴的平面截圆柱，所得的截面面积是轴截面面积的一半，求圆柱的轴到截面的距离。

2. 在等边圆锥（圆锥的轴截面为等边三角形）中，底面半径为 R ， AB 为底面直径， $\angle ABC = 60^\circ$ ，求异面直线 PA, BC 的距离。

3. 在棱长为 l 的正方体内有两个球相外切且又分别与正方体内切。

- (1) 求两球半径之和；
- (2) 球的半径为多少时，两球体积之和最小。

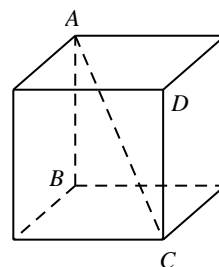
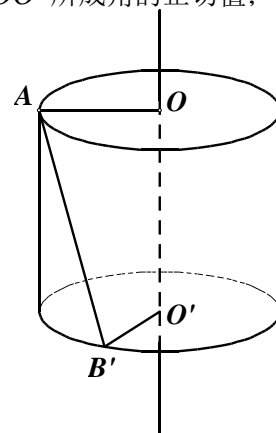


图9-37

4. 将半径都为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个正四面体的高的最小值为 ()

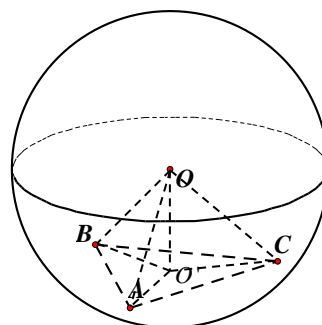
- A. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ B. $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ C. $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

5. 圆柱的高为 4 厘米，底面半径为 3 厘米，已知上底面一条半径 OA 所在直线与下底面的一条半径 $O'B'$ 所在直线的夹角为 60° ，求：(1) 直线 AB' 与圆柱的轴 OO' 所成角的正切值；(2) 线段 AB' 的长。



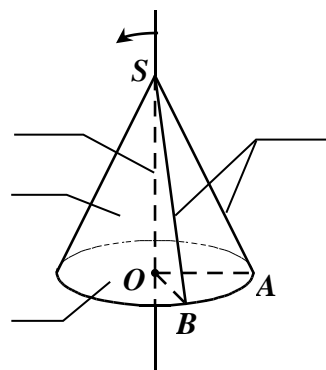
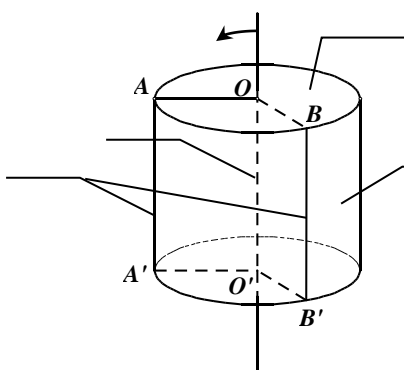
6. 已知 $\triangle ABC$ 各顶点均在球 O 的球面上，若球半径为 10，分别求球心到平面 ABC 的距离：

- (1) $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形；
 - (2) $\triangle ABC$ 是边长分别为 6, 7, 8 的三角形。
- (以上结果均保留 2 位小数)



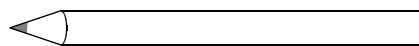
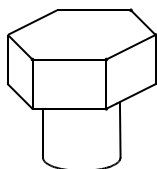
【训练题】

1.请在圆柱和圆锥上写出下列所指部分的名称：(轴、底面、侧面、母线)

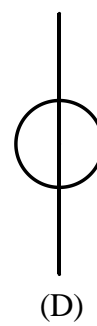
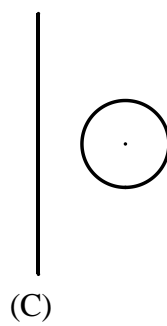
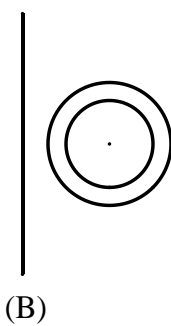
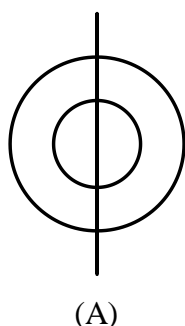


2.(1)下列生活中的物体分别由哪些简单几何体构成?

螺钉: _____ 画笔: _____



(2)充满气的车轮内胎(忽略厚度)可由下面图形()绕着对称轴旋转而成.



3.用一个平面截半径为 $25cm$ 的球,

(1)若截面面积是 $49\pi cm^2$, 则球心到截面的距离为 _____;

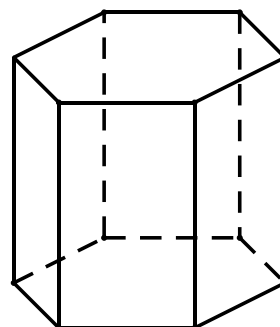
(2)若球心到截面的距离恰为半径的一半, 则截面面积为 _____.

4.把地球视为一个球,如果地球半径增大 1 米,那么地球赤道的长度会增大多少?
 _____.(精确到 0.01 米)

5.已知一个圆柱的轴截面是正方形,且面积为 $4cm^2$, 求圆柱的母线长和底面面积;

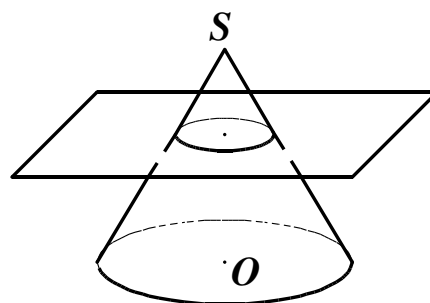
(2)已知一个圆锥的轴截面是边长为 2cm 的正三角形，求圆锥的底面面积及任意母线与底面所成角的大小.

6.正六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的高为 $\sqrt{3}$ ，底面周长为 3，求该球的半径长.



7.已知球 O 的半径为 5，若两平行平面分别截球所得的截面面积为 $9\pi, 21\pi$ ，求这两个平行平面间的距离.

8.用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得的两个旋转体分别为一个小圆锥和一个圆台，若小圆锥的底面半径与原圆锥的底面半径之比为 $1:4$ ，圆台的母线长为 9cm ，求原来的圆锥的母线长.



第十一讲 几何体的表面积和体积

【知识梳理】

一、棱柱和圆柱的侧面积和全面积

直棱柱的侧面积的计算公式，可以直接从它的侧面展开图得到：

直棱柱的侧面展开图是矩形。矩形的长和宽分别是直棱柱的底面周长 c 和直棱柱的高 h 。

直棱柱的侧面积是 $S_{\text{侧}} = ch$ 。直棱柱的全面积是 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}}$

圆柱的侧面展开图也是矩形。矩形的长和宽分别是圆柱的底面周长 c 和圆柱的高 h ， $c = 2\pi r$ ，其中 r 是圆柱底面圆半径。

圆柱的侧面积是 $S_{\text{侧}} = ch = 2\pi rh$ 。圆柱的全面积是 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ 。

二、棱锥和圆锥的侧面积和全面积

正棱锥的侧面积的计算公式，可以直接从它的侧面展开图得到

正棱锥的侧面展开图是由若干个全等的等腰三角形组成。正棱锥的侧面积是

$$S_{\text{侧}} = n \times \frac{1}{2} ah' = \frac{1}{2} ch'$$

正棱锥的全面积是 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}}$ 。

圆锥的侧面展开图是扇形。扇形的半径是圆锥的母线长 h' ，扇形的弧长是圆锥底面圆的周长 c ，其中 $c = 2\pi r$ 。

$$S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} ch' = \frac{1}{2} \times 2\pi rh' = \pi rh'$$

圆锥的全面积是 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi rh' + \pi r^2$ 。

三、球和它的部分面积

球面被一个平面截得的一部分叫做球冠。此平面截球面所得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的球的直径在截面和球冠之间的一段的高叫做球冠的高。球面可以看作最大的球冠，此球冠的高是 $2R$ 。

球面被两个平行平面所截，夹在两个平行平面之间的球面的一部分叫做球带。截得的两个圆叫做球带的底，两个平行平面之间的距离叫做球带的高

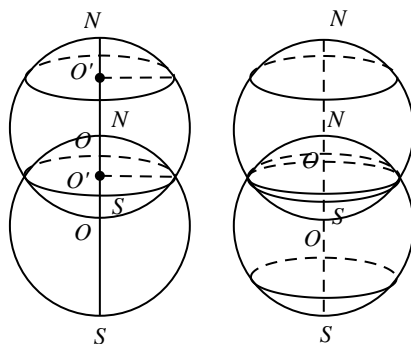


图9-72

球冠面积和球面积的计算公式 $S_{\text{球冠}} = 2\pi Rh$, $S_{\text{球}} = 4\pi R^2$.

其中 R 是球的半径, h 是球冠的高.

四、体积

公理 1 长方体的体积等于其长、宽、高的积.

公理 2 (祖暅原理) 若夹在两个平行平面内的两个几何体被平行于这两个平面的任何平面所截得的两个截面面积都相等, 则这两个几何体的体积相等.

- (1) 已知柱体的底面积是 S , 高是 h , 体积是 $V = Sh$.
- (2) 已知圆柱的底面积是 S , 高是 h , 体积是 $V = Sh$.
- (3) 三棱锥的底面积是 S , 高是 h , 体积是 $V = \frac{1}{3}Sh$.

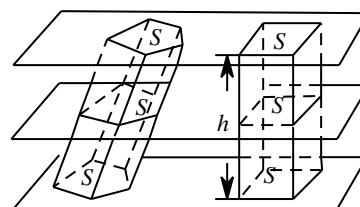


图9-75

【例题讲解】

1、在正方体上任意选择 4 个顶点, 它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点, 这些几何形体是_____.(写出所有正确结论的序号)

2、以圆柱的下底面为底面, 并以圆柱的上底面圆心为顶点作圆锥, 则该圆锥与圆柱等底等高. 若圆锥的轴截面是一个正三角形, 则圆柱的侧面积与圆锥的侧面积之比为_____.

3、斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 5 的正三角形, 侧棱长为 4, 侧棱 AA_1 和底面两边 A_1B_1 、 A_1C_1 都成 60° 角, 求这个棱柱的侧面积.

4、已知一个圆锥的底面半径为 R , 高为 H , 在其中有一个高为 x 的内接圆柱, 问 x 取何值时, 圆柱的侧面积最大?

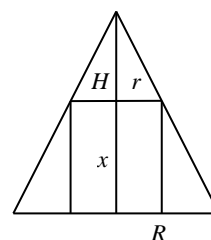


图9-63

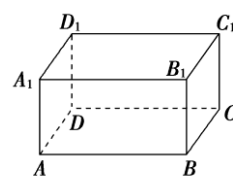
5、有两个相同的直三棱柱，高为 $\frac{2}{a}$ ，底面三角形的三边长分别为 $3a, 4a, 5a (a > 0)$ 。用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是_____。

6. 已知三棱锥的顶点在底面上的射影是底面正三角形的中心，三棱锥的侧棱长为 10 cm，侧面积为 144 cm^2 ，求棱锥的底面边长和高。

7. 已知一个圆柱的底面直径与高均为 $2R$ ，一个圆锥的底面直径与高均为 $2r$ ，若圆柱的表面积与圆锥的表面积相等，则 $R^2 : r^2 =$ _____。

8. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD=AA_1=1, AB > 1$ ，小蚂蚁从点 A 沿长方体的表面爬到点 C_1 ，所爬的最短路程为 $2\sqrt{2}$ 。

(1)求 AB 的长度；(2)求该长方体外接球的表面积。



9、三棱锥的底面是等腰三角形，这个三角形的底边长和底边上的高都是 4 cm，侧棱长都是 6.5 cm，求棱锥的体积。

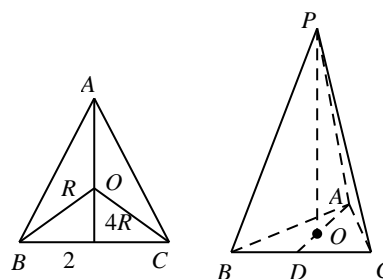
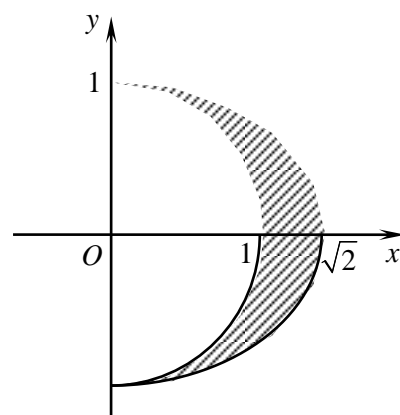


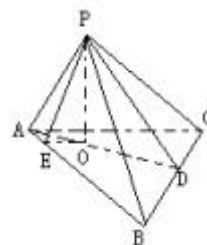
图9-77

10、在 xOy 平面上，将一段圆弧 $x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0)$ 和一段椭圆弧 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (x \geq 0)$ 围成的封闭图形记为 D ，如图中阴影部分。

记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω ，过 $(0, y) (|y| < 1)$ 作 Ω 的截面，所得截面面积为 $S(y)$ ，则 $S(y) =$ _____，进而利用祖暅原理和一个球，得出 Ω 的体积值为_____。



11、如图，三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA=a$ ， $AB=AC=2a$ ， $\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60^\circ$ ，求这个三棱锥的体积。



12、已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 a ，过 BC 作截面 DBC 垂直侧棱 PA 于 D ，且此截面与底面成 30° 角，求此三棱锥的侧面积。

13. 设一球的半径为 r ，求外切于这球的一切圆锥中全面积最小的圆锥的全面积。

【训练题】

1. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上，则此球的体积为_____。

2. 四面体 $DABC$ 的体积为 $\frac{1}{6}$ ，且满足 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$ ，求 DC 长。

3. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AA_1 = 4$ ， $AD = 3$ ，求异面直线 A_1D 与 B_1D_1 间的距离。

4. 在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB = 1$ ， $CD = \sqrt{3}$ ，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则四面体 $ABCD$ 的体积等于（ ）。

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

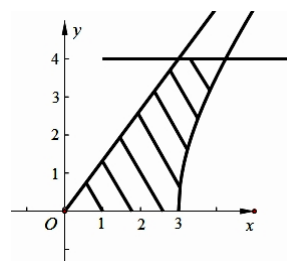
5 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 使 $BD=a$, 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为()

- A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ D. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

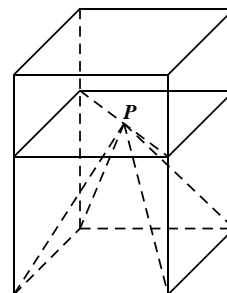
6、在 xOy 平面上, 将两个半圆弧 $(x-1)^2 + y^2 = 1(x \geq 1)$ 和 $(x-3)^2 + y^2 = 1(x \geq 3)$ 、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D , 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω , 过 $(0, y)$ 作 Ω 的水平截面, 所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2} + 8\pi$, 试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出 Ω 的体积值为_____

7、若三棱锥的三个侧面两两垂直, 且侧棱长均为 $\sqrt{3}$, 则其外接球的表面积是_____.

8、在 xOy 平面上, 将双曲线的一支 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1(x > 0)$ 及其渐近线 $y = \frac{4}{3}x$ 和直线 $y=0, y=4$ 围成的封闭图形记为 D , 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周所得的几何体为



9、如图, 一个正四棱柱形的密闭容器底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块, 容器内盛有 a 升水时, 水面恰好经过正四棱锥的顶点 P . 如果将容器倒置, 水面也恰好经过点 P . 有下列四个命题:
 A. 正四棱锥的高与正四棱柱高的一半;
 B. 将容器侧面水平放置时, 水面也恰好过点 P ;
 C. 任意摆放该容器, 当水面静止时, 水面都恰好经过点 P ;
 D. 若往容器内再注入 a 升水, 则容器恰好能装满.
 其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的序号)



第十二讲 球面距离

【知识梳理】

球的性质：

- (1) 同一个球的半径都相等；
- (2) 用任意平面截球所得的截面都是圆，球心与球截面圆心的连线与截面垂直；
- (3) 若用 R 和 r 分别表示球的半径和截面圆的半径，用 d 表示球心到截面网的距离，则

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} ;$$

- (4) 同一个球的大圆互相平分.

在平面上，两点间的距离是联结两点的直线段的长度. 在球面上，联结两点的最短路径叫做两点的球面距离. 可以证明两点的球面距离是过这两点的球的大圆的劣弧的长度.

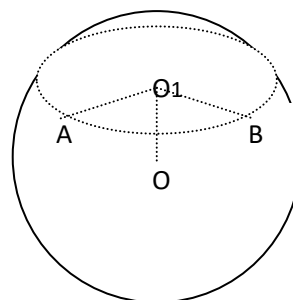
1. 劣弧上的长度是球面上两点之间的最短路径；
2. 我们把它称为球面上两点之间的距离；
3. 球面上连结两点之间的最短路径是经过这两点的一段大圆弧——劣弧。

球面距	
使用情景	求球面距
解题步骤	求线段 AB 的长度 \rightarrow 解 $\triangle OAB$ 得 $\angle AOB$ 的大小 (O 是球心) \rightarrow 利用公式 $l_{AB} = r \cdot \alpha$ 求 A, B 两点间的球面距.

【例题解析】

- 1、如图球 O 的半径为 2，圆 O_1 是一小圆， $O_1O = \sqrt{2}$ ， A, B 是圆 O_1 上两点，若

$\angle AO_1B = \frac{\pi}{2}$ ，则 A, B 两点间的球面距离为_____.

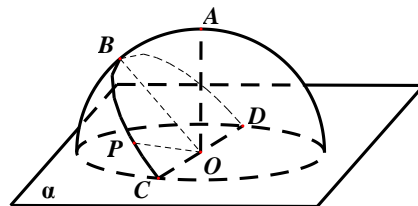


- 2、如图，半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内，过点 O

作平面 α 的垂线交半球面于点 A ，过圆 O 的直径 CD 作平面 α 成 45° 角的平面与半球面相交，所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B ，该交线上的一点 P 满足

$\angle BOP = 60^\circ$ ，则 A 、 P 两点间的球面距离为 ()

- A、 $R \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ B、 $\frac{\pi R}{4}$ C、 $R \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ D、 $\frac{\pi R}{3}$



3. 已知地球的半径为 R ，球面上 A, B 两点都在北纬 45° 圈上，它们的球面距离为 $\frac{\pi}{3}R$ ， A 点在东经 30° 上，求 B 点的位置及 A, B 两点所在其纬线圈上所对应的劣弧的长度.

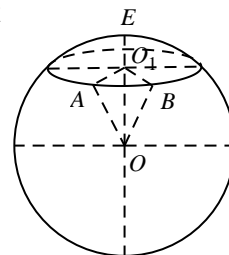
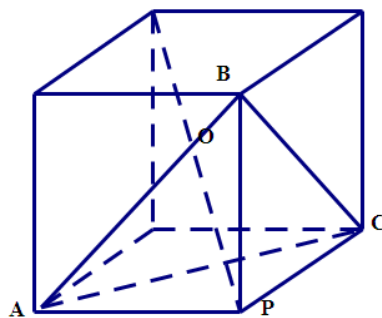
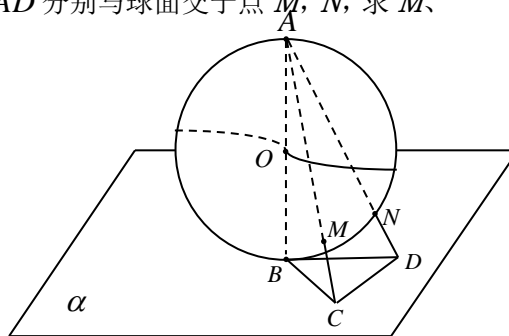


图9-36

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ ，点 P, A, B, C 都在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上，若 PA, PB, PC 两两互相垂直，则球心到截面 ABC 的距离为 _____.



5. 半径为1的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α ，垂足为 B ， $\square BCD$ 是平面 α 内边长为1的正三角形，线段 AC, AD 分别与球面交于点 M, N ，求 M, N 两点间的球面距离。
(保留到小数点后两位)



6. 已知球 O 的半径为 1， A, B, C 三点都在球面上， A, B 两点和 A, C 两点的球面距离都是 $\frac{\pi}{4}$ ， B, C 两点的球面距离是 $\frac{\pi}{3}$ ，则二面角 $B-OA-C$ 的大小是 ()

- A $\frac{\pi}{4}$ B $\frac{\pi}{3}$ C $\frac{\pi}{2}$ D $\frac{2\pi}{3}$

【训练题】

1. 下列说法正确的是()

- A. 经过球面上两点有且仅有一个大圆; B. 经过球面上两点有无数个大圆;
 C. 经过球面上两点有且仅有一个小圆; D. 经过球面上两点可能没有小圆.

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2, AD=\sqrt{3}, AA_1=1$, 如图所示, 则顶点 A, B 间的球面距离是()

- A. $2\sqrt{2}\pi$ B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

3. 设地球半径为 R , 地球上 A, B 两点都在北纬 45° 的纬线上, A, B 两点的球面距离是 $\frac{\pi}{3}R$,

A 在东经 20° , 求 B 点的位置。

4. (2002 年第六届北京高中数学知识应用竞赛试题) 北京时间 2002 年 9 月 27 日 14 点, 国航 CA981 航班从首都国际机场准时起飞, 当地时间 9 月 27 日 15 点 30 分, 该航班正点平稳降落在纽约肯尼迪机场; 北京时间 10 月 1 日 19 点 14 分, CA982 航班在经过 13 个小时的飞行后, 准点降落在北京首都国际机场, 至此国航北京--纽约直飞首航成功完成。这是中国承运人第一次经极地经营北京--纽约直飞航线。从北京至纽约原来的航线飞经上海(北纬 31° , 东经 122°) 东京(北纬 36° , 东经 140°) 和旧金山(北纬 37° , 西经 123°) 等处, 如果飞机飞行的高度为 10 千米, 并假设地球是半径为 6371 千米的球体, 试分析计算新航线的空中航程较原航线缩短了多少。

第十三讲 排列组合

【知识梳理】

1、排列，排列数：

从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数。用符号 P_n^m 表示。

2、排列数公式：

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (m, n \in N^*, m \leq n)$$

3、组合，组合数：

从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示。

$$\text{组合数公式为 } C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \quad (m, n \in N^*, m \leq n),$$

规定 $C_n^0 = C_n^n = 1$ 。

组合数的性质

性质一、 $C_n^m = C_n^{n-m}$

性质二、 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

4、解决排列组合问题常见的解题方法有：

直接法，间接法，捆绑法，插空法，元素优先法等。

【例题解析】

1、制作某工件需要三道工序，第一道有 5 人会做，第二道有 6 人会做，第三道有 7 人会做，

现要制作这个工件，有多少种不同的选法？

2、3 名同学分别从英语和日语中选学一门外语课程，则不同的选法有多少种？

3、有 10 本不同的书，三个人去借，每人借一本，有多少种不同的借法？

4、4 封不同的信投入 3 个不同的箱子，若每个箱子至少投一封信，共有多少种不同的投法？

5、用 0、1、2、3、4、5 这六个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

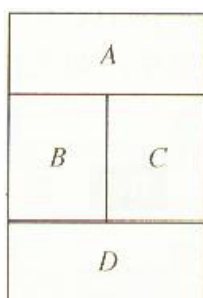
6、540 的不同正约数共有多少个？

7.用数字 0、1、2、3、4 组成没有重复数字的五位数，则其中数字 1、2 相邻的偶数有多少个？

8、从 1 到 200 的自然数中，各个数位上都不含有数字 7 的数有多少个？

9、若直线方程 $ax+by=0$ 的系数 a 、 b 可以从 0、1、2、3、5、8 这六个数中取不同的值，则这些方程所表示的不同直线有多少条？

10、如图，用 5 种不同的颜色给图中的 A、B、C、D 四个矩形区域中涂色，如果每个区域只能图一种颜色，相邻区域颜色不同，共有多少种不同的涂色方法？



11、用红、黄、蓝三种颜色分别去涂图中标号为 1,2,3,...9 的个 9 小正方形（如右图），需满足任意相邻（有公共边的）小正方形涂颜色都不相同，且标号“1、5、9”的小正方形涂相同的颜色，则符合条件的所有涂法共有_____种。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

12、乘积 $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项？

13、七名班委进行分工，每人一职，甲乙两人不宜当班长，丙丁不宜任文娱委员，则分工方案有多少种？

14、从 1 到 9 这 9 个正整数中任取两个不同的数，分别作为一个对数的真数和底数，一共可

以得到多少个不同的对数值？

15、用数字 2,3 组成四位数，且数字 2,3 至少都出现一次，这样的四位数共有多少个（用数字作答）？

16、由数字 1,2,3,4,

(1) 可组成多少个 3 位数；

(2) 可组成多少个没有重复数字的 3 位数；

17、某植物研究所共有 14 名科研人员，其中 6 名是女性。现要选出男、女科研人员各一名去支援西部开发建设，有多少种选法？

18、在一块并排的 10 垄田地中，选择两垄分别种植 A、B 两种作物，每种种植一垄，为有利于作物生长，要求 A、B 两种作物的间隔不少于 6 垄，不同的选法共有多少种？

19、写出从 a 、 b 、 c 、 d 四个元素中任意取出两个元素的所有排列。

20、若 $2 < \frac{P_{m+1}^{m+1}}{P_{m-1}^{m-1}} \leq 42 (m \in N^*)$, 则 $m =$ _____.

21、记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，2 位老人相邻但不排在两端，不同的排法共有多少种？

22、有 5 个座位连成一排，安排 2 人就座，有且只有两个空位相邻的不同坐法有多少种？

23、某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段，传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生，则不同的传递方案共有多少种？

24、经过三棱锥的各顶点可以连结多少条线段？多少条有向线段？

25、从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会，若这 4 人中必须既有男生又有女生，那么有多少种不同的方法？

26、某校开设 9 门课程供学生选修，其中 A 、 B 、 C 三门由于上课时间相同，至多选一门，学校规定每位同学选修 4 门，共有多少种不同的选修方案.

27、某校有 6 间不同的电脑室，每天晚上至少开放 2 间，欲求不同方案的种数，四位同学分

别给出下列四个答案：① C_6^2 ；② $C_6^3 + 2C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$ ；③ $2^6 - 7$ ；④ P_6^2 . 其中正确的答案是

(A) 仅有① (B) 仅有② (C) ②和③ (D) 仅有③

28、从 4 件不同的美术作品中，选出三件分别送至三个展馆中陈列展出一件，如果有一件作品必须送展，则不同的送展方法有多少种？

29、特奥会期间，某高中有 14 名志愿者参加接待工作. 若每天排早、中、晚三班，每班 4 人，每人每天最多值一班，则开幕式当天不同的排班种数为多少种？

30、从一副扑克牌（52 张）种任取 4 张，恰有两种花色各两张的不同取法有多少种？

31、2 位老师与 6 位同学排成一排拍照，求：

(1) 共有多少种不同的排法； (2) 2 位老师必须相邻，共有多少种排法；

(3) 2 位老师必须隔开，共有多少种不同的排法.

32、已知集合 $A = \{2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{0, -1, 4\}$, 从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标，则满足条件的不同点的个数为多少个？

33、某工程队有 6 项工程需要单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后才能进行，工程丁必须在工程丙完成后才能进行. 那么安排这 6 项工程

的不同排法种数是多少种？

34、同室四人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺卡，则四张贺卡的不同分配方式有多少种？

35、在平面直角坐标系中，从六个点： $A(0,0)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(1,1)$ 、 $D(0,2)$ 、 $E(2,2)$ 、 $F(3,3)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的个数是多少个？

36、顺次连结正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点，所得三角形恰为直角三角形的个数为多少个？

37、某书店有 11 种杂志，2 元 1 本的 8 种，1 元 1 本的 3 种。小张用 10 元钱买杂志（每种至多买一本，10 元钱刚好用完），则不同买法的种数是多少种？

38、某校要求每位学生从 7 门选修课程中选修 4 门，其中甲乙两门课程不能都选，则不同的选课方案有_____种。（以数字作答）

39、甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生进行某种劳动技术比赛，决出了第一名到第五名的名次，甲乙两名参赛者去询问成绩，回答者对甲说：“很遗憾，你和乙都未拿到冠军。”对乙说：“你当然不会是最差的。”从这个回答分析，五人的名次排列共可能有多少种不同的情况。

【训练题】

- 1、5 位旅客可以在 3 个旅馆任意选择 1 个住宿，共有多少种不同的住宿方法？

- 2、某外商计划在四个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该外商不同的投资方案有多少种？

- 3、从 $1, 2, \dots, 10$ 这 10 个自然数中，每次取出不同两个，使它们的乘积是 6 的倍数，这不同的取法有多少种？

- 4、某通讯公司推出一组手机卡号码，卡号的前七位数字固定，从 “ $\times\times\times\times\times\times\times\times 0000$ ” 到 “ $\times\times\times\times\times\times\times\times 9999$ ” 共有 10000 个号码.公司规定：凡卡号的后四位带有数字 “4” 或 “7” 的一律作为 “优惠卡”，则这组号码中 “优惠卡” 的个数为多少个？

- 5、某校安排 5 个班到 4 个工厂进行社会实践，每个班去一个工厂，每个工厂至少安排一个班，不同的安排方法共有多少种？

- 6、从正方体的六个面中任取三个面，有且只有两个面相邻的取法有多少种？

- 7、8 名学生和 2 位教师站成一排合影，2 位教师不相邻的排法种数为…… ()
 A、 $P_8^8 \cdot P_9^2$ B、 $P_8^8 \cdot C_9^2$ C、 $P_8^8 \cdot P_7^2$ D、 $P_8^8 \cdot C_7^2$

- 8、由 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字可以组成没有重复数字且不能被 5 整除的四位数的个数是多少个？

9、现有甲、乙、丙三个盒子，其中每个盒子中都装有标号分别为 1、2、3、4、5、6 的六张卡片，现从甲、乙、丙三个盒子中依次各取一张卡片使得卡片上的标号恰好成等差数列的取法为多少种？

第十四讲 二项式定理

【知识梳理】

1. 二项式定理：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^*),$$

2. 二项展开式的通项公式： $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ，二项式系数： C_n^r ，项的系数：二项式系数与数字系数的积

3. 二项式系数的性质：

(1) 对称性. 与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等 ($\because C_n^m = C_n^{n-m}$).

(2) 增减性与最大值：

若 n 为偶数，中间一项（第 $\frac{n}{2} + 1$ 项）的二项式系数最大；若 n 为奇数，中间两项（第 $\frac{n+1}{2}$

和 $\frac{n+1}{2} + 1$ 项）的二项式系数最大.

4. 各二项式系数和： $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ；

5. 二项展开式的系数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的性质及赋值法.

【例题解析】

1. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80，则实数 a 的值是 ()

A. 2 B. -2 C. $\sqrt[3]{4}$ D. $2\sqrt{2}$

2. $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$ 的值为 ()

A. 61 B. 62 C. 63 D. 64

3. 若 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\frac{1}{x^4}$ 项的系数之比为 5, 则 n 等于()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

4. 在 $(1+x)^5 + (1+x)^6 + (1+x)^7$ 的展开式中, x^4 的系数是通项公式为 $a_n = 3n - 5$ 的数列的_____。

5. 已知 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中偶数项二项式系数和比 $(a+b)^{2n}$ 展开式中奇数项二项式系数

和小 120, 求: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中第 3 项的系数;

6. 在二项式 $\left(\frac{1}{2} + 2x\right)^n$ 的展开式中, 若第 5 项, 第 6 项与第 7 项的二项式系数成等差数列, 求展开式中二项式系数最大的项;

7. 在 $(1+x)^3 + (1+\sqrt{x})^2 + (1+\sqrt[3]{x})$ 的展开式中, x 的系数为_____ (用数字作答).

8. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2}}\right)^n$ 展开式中偶数项的二项式系数之和为 256, 求 x 的系数及其二项式系数.

9. 设 $a_n (n = 2, 3, 4, \dots)$ 是 $(3 - \sqrt{x})^n$ 的展开式中 x 的一次项的系数, 则 $\frac{3^2}{a_2} + \frac{3^3}{a_3} + \dots + \frac{3^{18}}{a_{18}}$ 的值为_____。

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 1$, 公比 q 是 $\left(x + \frac{1}{4x^2}\right)^4$ 的展开式的第二项 (按 x 的降幂排列)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和 S_n ;

(2) 若 $A_n = C_n^1 S_1 + C_n^2 S_2 + \dots + C_n^n S_n$, 求 A_n 。

【训练题】

1. $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是
 A. 14 B. -14 C. 42 D. -42
2. $C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2k} + \dots + C_{2n}^{2n}$ 的值为
 ()
 A. 2^n B. 2^{2n-1} C. 2^{n-1} D. $2^{2n-1} - 1$
3. 已知 $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数的和是 128, 则展开式中 x^5 的系数是
 _____ . (以数字作答)
4. 设 $(2x-3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ 的值为 ()
 A. 1 B. 16 C. -15 D. 15
5. 已知 $(1-3x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$, 则 $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_9|$ 等于 ()
 A. 2^9 B. 4^9 C. 3^9 D. 1
6. 若 $n \in N^*$, 则 $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 3 + (-1)^n C_n^n 3^0$ 的值是_____.
7. 求 2^{30} 除以 9 所得的余数.

第十六讲 空间向量

【知识梳理】

1. 空间向量的有关概念及线性运算

空间向量的大小模，零向量，平行向量

空间向量的加法与数乘向量运算律：

2. 空间向量的有关定理

3. 空间向量的数量积

4. 平面的法向量

5. 空间的角

① 若异面直线 l_1, l_2 的方向向量为 \vec{u}_1, \vec{u}_2 ， l_1 与 l_2 所成的角为 α ，则 $\cos \alpha = |\cos \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle|$

② 已知直线 l 的方向向量为 \vec{v} ，平面 α 的法向量 \vec{u} ， l 与平面 α 的夹角为 α ，则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$$

③ 已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个面 α 和 β 的法向量分别为 \vec{v}, \vec{u} ，则 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ 与该二面角相等或互补；

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

3. 空间的距离

若平面 α 的一个法向量为 \vec{u} ，P 是平面 α 外一点，A 是 α 内任一点，则点 P 到平面 α 的距

$$离 d = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

【例题解析】

1、在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为 AC 与 BD 的交点，若 $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}, \overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}, \overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$. 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ().

- (A) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ (B) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
 (C) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ (D) $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

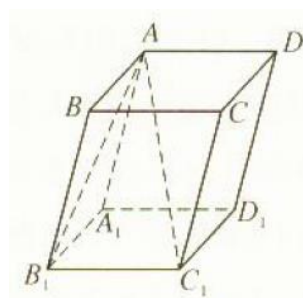
2、棱长为 a 的正四面体中，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3、向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两垂直，且 $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ， $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ，则 \vec{p} 与 \vec{a} 的夹角是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4、平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，

$\angle B_1A_1D_1 = \angle AA_1B_1 = \angle AA_1D_1 = 120^\circ$ ，则 $AC_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$\angle B_1C_1A = \underline{\hspace{2cm}}$.



5、若 $\vec{a} = (x, 1, -2), \vec{b} = (1, x^2, 2-x)$ ，且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为钝角，

则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6、已知 $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-2, 0, 4), \vec{c} = (-2, 1, 2)$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = m, |\vec{b}| = 4$ ， θ 为 \vec{b} 与 \vec{c} 所成的角.

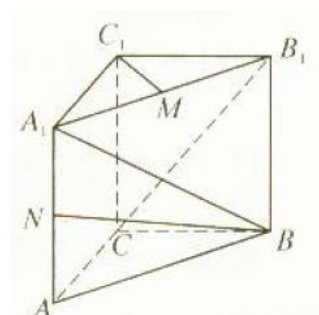
(1) 当 $m = 2$ 时，求 θ 的值；

(2) 当 m 为何值时， θ 的值最大？并求出此时 \vec{b} 的坐标.

7、棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，在棱 DD_1 上是否存在点 P ，使得

$B_1D \perp \text{面 } PA$?

8、如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $CA = CB = 1$ ，



$\angle BCA = 90^\circ, AA_1 = 2$, M 、 N 分别为 A_1B_1 、 A_1A 的中点.

- (1) 求 \overline{BN} 的长;
- (2) 求 $\overline{BA_1}$ 、 $\overline{CB_1}$ 所成的角的余弦值;
- (3) 求证: $A_1B \perp C_1M$.

9、已知直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D_1, E_1 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, 若 $BC = CA = CC_1$, 则 BD_1 与 AE_1 所成角的余弦值是_____.

10、已知在直棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = 4, AC = 4, BC = 3$, D 为 A_1B_1 的中点, 求 AC 与 BD 所成角的大小.

11、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 过顶点 B, D, C_1 作截面, 则二面角 $B - DC_1 - C$ 的大小是_____ (用反三角函数表示).

12、在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, AD = 4$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 那么二面角 $A - BD - P$ 的大小为_____.

13、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的大小是_____.

14、若 P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中棱 A_1B_1 的中点, 则截面 PC_1D 和平面 AA_1B_1B 所成二面角的正切值为_____.

15、已知三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 PBC , $PA = 2, PB = PC = 4$, $\angle BPC = 120^\circ$, 求二面角 $B - AC - P$ 的大小.

16、已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1, 高为 $h(h > 2)$, 动点 M 在侧棱 BB_1 上移

动, 设 AM 与侧面 BB_1C_1C 所成的角为 θ .

(1) 当 $\theta \in [30^\circ, 45^\circ]$ 时, 求点 M 到平面 ABC 的距离的取值范围;

(2) 当 $\theta = 30^\circ$ 时, 求向量 \overrightarrow{AM} 与 \overrightarrow{BC} 夹角的大小.

【训练题】

1、已知空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{CD} = \vec{b}$, 对角线 AC 、 BD 的中点分别为 E 、 F , 则 $\overrightarrow{EF} =$ _____.

2、 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, P 为面 ABC 外一点, 且 $PA \perp$ 面 ABC , F 为 PB 的中点, G 为 $\triangle PBC$ 的重心, 若 $\overrightarrow{FG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AP}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____.

3、已知 \vec{a}, \vec{b} 是空间两非零向量, $\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 5\vec{b}$ 垂直, 且 $\vec{a} - 4\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 2\vec{b}$ 垂直, 则向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角大小为_____.

4、若 $\vec{a} = (2x, -1, 4), \vec{b} = (1, 3y, 6)$, 如果 \vec{a} 与 \vec{b} 为共线向量, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

5、已知 $A(3, 2, 1)B(1, 0, 4)$.

(1) 求线段 AB 的中点坐标和长度;

(2) 若直线 AB 与 xOy 平面相交与点 C , 求点 C 的坐标;

(3) 若 z 轴上有一点 P 到 A 、 B 两点距离相等, 求点 P 的坐标.

6、如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 A_1B_1, BC 的中点, 若 \vec{d} 是直线 EF 的方向向量, 且 $|\vec{d}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{d} =$ _____.

7、已知 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (4, 5, 3)$, 则平面 ABC 的单位法向量为_____.

8、已知平面 α 经过点 $A(3,1,-1), B(1,-1,0)$ ，且平行与向量 $\vec{d} = (-1,0,2)$ ，求平面 α 的一个法向量.

9、在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = AD = 1$ ， $AB = 2$ ， E 是 AB 的中点，则 AA_1 与 D_1E 所成角的大小是_____.

10、平面 α 的一个法向量为 $\vec{m} = (a,0,1)$ ，直线 l 的一个方向向量为 $\vec{n} = (3,-4,5)$ ，若直线 l 与平面 α 所成角为 30° ，则正数 $a =$ _____.

11、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别是 BC, CD 的中点，则直线 A_1D 与平面 EFD_1B_1 所成角的大小为_____.

12、在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2, AD = 1, AA_1 = 1$ ，则直线 BC_1 与平面 D_1AC 的距离为_____.

第十七讲 概率统计

【知识梳理】

1. 随机事件的概率

① 试验 ② 事件

2. 古典概率模型

(1) 一次试验所有的基本事件只有有限个；

(2) 每个基本事件出现的可能性相等，这样两个特点的概率模型叫做古典概型

3. 频率与概率

平均数 中位数 众数

4. 总体和样本

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_N - \mu)^2}{N}$$
，其平方根 σ 称为总体标准差

5. 抽样技术

(1) 随机抽样 (2) 系统抽样 (3) 分层抽样

6. 统计估计

可以用样本的标准差 $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$

作为总体标准差的点估计值。

【例题解析】

- 一枚硬币连掷3次，只有一次出现正面的概率为_____。
- 若某学校要从5名男生和2名女生中选出3人作为上海世博会的志愿者，则选出的志愿者中男女生均不少于1名的概率是_____（结果用最简分数表示）。
- 从编号为1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10的10个大小相同的球中任取4个，则所取4个球的最大号码是6的概率是_____。
- 在一个口袋中装有5个黑球和3个白球，这些球除颜色外完全相同，从中摸出3个球，则摸出白球的个数多于黑球的个数的概率为_____（ ）
 A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{9}{28}$
- 有20张卡片，每张卡片上分别标有两个连续的自然数 $k, k+1$ ，其中 $k=0, 1, 2, \dots, 19$ ；从这20张卡片中任取一张，记事件“该卡片上两个数的各位数字之和（例如：若取到标有9, 10的卡片，则卡片上两个数的各位数字之和为 $9+1+0=10$ ）不小于14”为A，则 $P(A) =$ _____。
- 若随机从集合 $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\}$ 中选出两个不同的元素 a, b ，则 $\log_a b$ 为整数的概率为_____。
- 袋中装有大小均匀分别写有1, 2, 3, 4, 5五个号码的小球各一个，现从中有放回地任取三球，求下列事件的概率；
 (1) 三球号码完全不同；(2) 三球号码中不含4和5；
 (3) 三球号码数2恰好出现两次。
- 一个单位有职工800人，其中具有高级职称的160人，具有中级职称的320人，具有初

级职称的 200 人，其余人员 120 人、为了解职工收入情况，决定采用分层抽样的方法，从中抽取容量为 40 的样本，则从上述各层中依次抽取的人数分别是_____。

9、从长度分别为 2,3,4,5 的四条线段中任意取出三条，以这三条线段为边可以成三角形的概率是_____。

10、从 5 张 10 元，3 张 200 元，2 张 300 元的奥运预赛门票中任取 3 张，则所取 3 张中至少有 2 张价格相同的概率为_____。

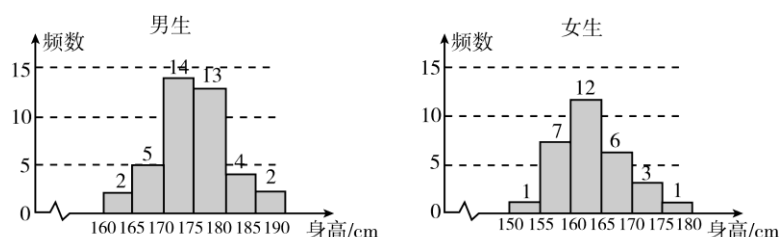
11、若三个数 a_1, a_2, a_3 的方差为 1，则 $3a_1 + 2, 3a_2 + 2, 3a_3 + 2$ 的方差为_____。

12、为了解学生身高情况，某校以 10% 的比例对全校 700 名学生按性别进行分层抽样调查，测得身高情况的统计图如下：

(1) 估计该校男生的人数；

(2) 估计该校学生身高在 $170 \square 185cm$ 之间的概率；

(3) 从样本中身高在 $165 \square 180cm$ 之间的女生中任选 2 人，求至少有 1 人身高在 $170 \square 180m$ 之间的概率。



13、在某地的奥运火炬传递活动中，有编号为 1,2,3,...,18 的 18 名火炬手、若从中任选 3 人，则选出的火炬手的编号能组成以 3 为公差的等差数列的概率为 ()

- A) $\frac{1}{51}$ B) $\frac{1}{68}$ C) $\frac{1}{306}$ D) $\frac{1}{408}$

14、在教室内有 10 个学生，分别佩带着从 1 号到 10 号的校徽，任意取 3 人记录其校徽的号码；(1) 求最小号码为 5 的概率；(2) 求 3 个号码中至多有一个是偶数的概率；

(3) 求 3 个号码之和不超过 9 的概率。

15、某农场计划种植某种新作物，为此对这种作物的两个品种（分别称为品种甲和品种乙）进行田间试验、选取两大块地，每大块地分成 n 小块地，在总共 $2n$ 小块地中，随机选 n 小块地种植品种甲，另外 n 小块地种植品种乙；

(1) 假设 $n = 2$ ，求第一大块地都种植品种甲的概率；

(2) 试验时每大块地分成 8 小块，即 $n = 8$ ，试验结束后得到品种甲和品种乙在个小块地上的每公顷产量（单位： kg/hm^2 ）如下表：

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙的每公顷产量的样本平均数和样本方差；根据试验结果，你认为应该种植哪一品种？

【训练题】

1、从 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中随机选取一个数为 a ，从 $\{1, 2, 3\}$ 中随机选取一个数为 b ，则 $b > a$ 的概率是_____。

2、2012 年伦敦奥运会我国将派 5 名正式运动员和 3 名替补运动员参加体操比赛，最终将有 3 人上场比赛，其中甲、乙两名替补运动员均不上场比赛的概率是_____。

3、从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 这 10 个数中任意抽取三个数，其中至少有两个数是连续整数的概率是_____。

4、有一组统计数据共 10 个，它们是：2, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, x ，已知这组数据的平均数为 6，则这组数据的方差为_____。

5、某高中在校学生 2000 人，高一级与高二级人数相同并都比高三级多 1 人，为了响应“阳光体育运动”号召，学校举行了“元旦”跑步和登山比赛活动、每个人都参加而且只参与了其中一项比赛，各年级参与比赛人数情况如下表：

	高一级	高二级	高三级
--	-----	-----	-----

跑步	a	b	c
登山	x	y	z

其中 $a:b:c=2:3:5$ ，全校参与登山的人数占总人数的 $\frac{2}{5}$ ，为了了解学生对本次活动的满意程度，从中抽取了一个 200 人的样本进行调查，则高二级参与跑步的学生中应抽取 ()

A) 36 人 B) 60 人 C) 24 人 D) 30 人

第十八讲 期末复习

【知识梳理】

立体几何、空间向量、二项式定理、排列组合、概率统计

【例题解析】

- 1、如果圆锥的底面圆半径长为1，母线长为2，则该圆锥的侧面积为_____.
- 2、某校开设9门课程供学生选修，其中A、B、C三门由于上课时间相同，至多选一门；学校规定，每位同学选修4门，共有_____种不同的选修方案。
- 3、在棱长为 a 的正四面体中，相对两条棱间的距离为_____。
- 4、与不共面的四点距离都相等的平面共有_____个。
- 5、一个长方体共一个顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，则长方体对角线的长是_____。
- 6、在正三棱锥中
 - (1) 若底面边长为 $\sqrt{3}$ ，侧棱长为2，则其高为_____。
 - (2) 若侧棱长与底面边长之比为2:3，则高与斜高之比等于_____。
 - (3) 若面边长为 a ，侧棱与底面所成的角是 45° ，则其斜高等于_____。
 - (4) 若棱长都是 a ，则以各侧面各中心为顶点的三角形面积等于_____。
 - (5) 若侧棱长为 $\sqrt{5}cm$ ，底面边为 $2cm$ ，则侧面与底面所成的二面角为_____。
- 7、由1,2,3,4,5,6组成没有重复数字且1,3都不与5相邻的六位偶数的个数是 ()

A) 72 B) 96 C) 108 D) 144
- 8、如果四棱锥的四条侧棱都相等，就称它为“等腰四棱锥”，四条侧棱称为它的腰，以下4个命题中，假命题是 ()

A) 等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

B) 等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

C) 等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

D) 等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

9、有4名男生、5名女生，全体排成一行，问下列情形各有多少种不同的排法？

(1) 甲不在中间也不在两端；(2) 甲、乙两人必须排在两端；

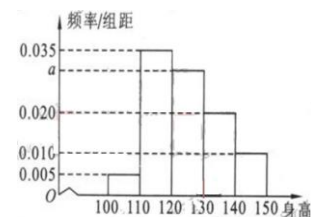
(3) 男、女生分别排在一起；(4) 男女相间；

(5) 甲、乙、丙三人从左到右顺序保持一定。

10、某企业有3个分厂生产同一种电子产品，第一、二、三分厂的产量之比为1:2:1，用分层抽样方法（每个分厂的产品为一层）从3个分厂生产的电子产品中共取100件作使用寿命的测试，由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均值分别为980h,1020h,1032h，则抽取的100件产品的使用寿命的平均值为_____。

11、从集合 $\{1,2,3,\dots,10\}$ 中，选出由5个数组成的子集，使得这5个数中的任何两个数的和不等于11，则这样的子集共有_____。

12、从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图(如图)。由图中数据可知 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若要从身高在 $[120,130)$ ， $[130,140)$ ， $[140,150]$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法选取18人参加一项活动，则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为_____。



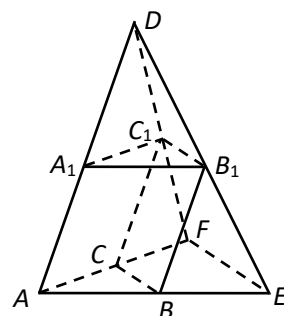
13、某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价分别为60元的单片软件和70元的盒装磁盘；根据需要，软件至少买3张，磁盘至少买2盒；则不同的选购方式共有多少种？

14、在 $(x + \sqrt[4]{3}y)^{20}$ 的展开式中，系数为有理数的项共有_____项。

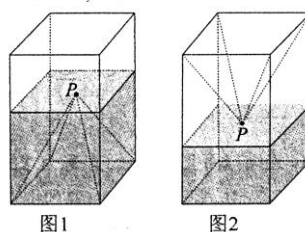
15、在甲、乙等6个单位参加的一次“唱读讲传”演出活动中，每个单位的节目集中安排在一起，若采用抽签的方式随机确定各单位的演出顺序（序号为1,2,⋯,6），求：

- (1) 甲、乙两单位的演出序号均为偶数的概率；
 (2) 甲、乙两单位的演出序号不相邻的概率。

16、如图，在三棱锥 $D-AEF$ 中， A_1, B_1, C_1 分别是 DA, DE, DF 的中点， B, C 分别是 AE, AF 的中点，设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1 ，三棱锥 $D-AEF$ 的体积为 V_2 ，则 $V_1:V_2 =$ _____。



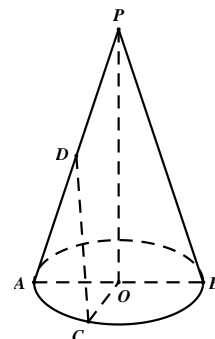
17、如图 1，一个正四棱柱形的密闭容器水平放置，其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块，容器内盛有 a 升水时，水面恰好经过正四棱锥的顶点 P ，如果将容器倒置，水面也恰好过点 P （图 2）；



有下列四个命题：

- (1) 正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半
 (2) 将容器侧面水平放置时，水面也恰好过点 P
 (3) 任意摆放该容器，当水面静止时，水面都恰好经过点 P
 (4) 若往容器内再注入 a 升水，则容器恰好能装满其中真命题的代号是_____。（写出所有真命题的代号）

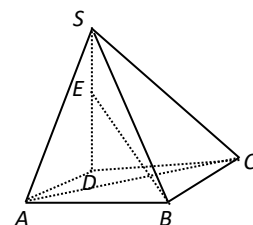
18. 如图，圆锥的底面半径 $OA = 2$ ，高 $PO = 6$ ，点 C 是底面直径 AB 所对弧的中点，点 D 是母线 PA 的中点。



- (1) 求圆锥的侧面积与体积；(2) 求异面直线 CD 与 AB 所成角的大小（结果用反三角函数表示）。

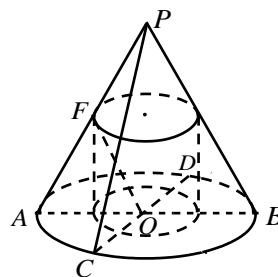
19. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形， $SD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $SD = AD = a$ ，点 E 是线段 SD 上任意一点。

- (1) 求证： $AC \perp BE$ ；



(2) 试确定点 E 的位置, 使 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 30° .

20. 如图, 在一个圆锥内作一个内接圆柱 (圆柱的下底面在圆锥的底面上, 上底面的圆在圆锥的侧面上), 圆锥的母线长为 4, AB 、 CD 是底面的两条直径, 且 $AB = 4$, $AB \perp CD$, 圆柱与圆锥的公共点 F 恰好为其所在母线 PA 的中点, 点 O 是底面的圆心.



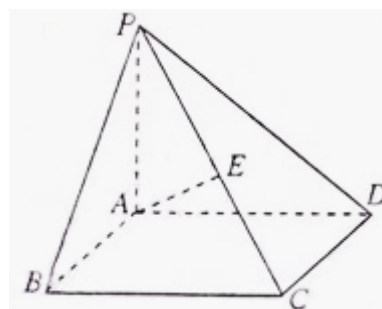
- (1) 求圆柱的侧面积;
- (2) 求异面直线 OF 和 PC 所成的角的大小.

【训练题】

- 1、已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于_____。
- 2、设点 $A(1,1)$ 、 $B(1,-1)$, O 是坐标原点, 将 ΔOAB 绕 y 轴旋转一周, 所得几何体的体积为_____。
- 3、某同学有同样画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有_____。
- 4、现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动, 每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一, 每项工作至少有一人参加; 甲、乙不会开车但能从事其他三项工作, 丙、丁、戊都能胜任四项工作, 则不同安排方案的种数是 ()

- A) 152 B) 126 C) 90 D) 54

5. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, 已知 $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$. 求:



- (1) 三角形 PCD 的面积;
- (2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小.

