高二数学 第一讲 平面及其基本性质

【知识梳理】

知识点一 平面

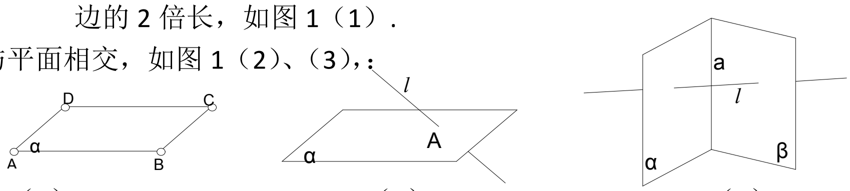
1．特征：①无限延展 ②平的（没有厚度），平面是抽象出来的，只能描述，如平静的湖面，不能定义.一个平面把空间分成两部分，一条直线把平面分成两部分.

2．表示：一般用一个希腊字母 α、β、γ……来表示，还可用平行四边形的对角顶点的字母来表示如：平面 α，平面 AC 等.

3．画法：通常画平行四边形来表示平面

(1)一个平面： 当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成邻边的 2 倍长，如图 1（1）.

(2)直线与平面相交，如图 1（2)、(3)，:



（1） （2） （3）

图 1

（3）两个相交平面：画两个相交平面时，先定位，后交线，邻边依次添，若一个平面的一部分被另一个平面遮住，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画（如图 2）.

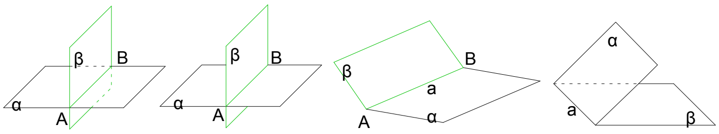
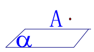
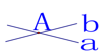
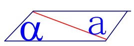
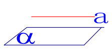
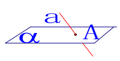
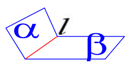


图 2

4.点、线、面的基本位置关系如下表所示：

图形	符号语言	文字语言（读法）
	$A\in a$	点 A 在直线 a 上.
	$A\notin a$	点 A 不在直线 a 上.
	$A\in\alpha$	点 A 在平面 α 内.
	$A\notin\alpha$	点 A 不在平面 α 内.
	$a\bigcap b=A$	直线 a、b 交于 A 点.
	$a\subset\alpha$	直线 a 在平面 α 内.
	$a\bigcap\alpha=\varnothing$	直线 a 与平面 α 无公共点.
	$a\bigcap\alpha=A$	直线 a 与平面 α 交于点 A.
	$\alpha\bigcap\beta=l$	平面 α、β 相交于直线 l.

知识点二　三条公理

人们经过长期的观察和实践，把平面的三条基本性质归纳成三条公理.

公理 1 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

应用：　①判定直线在平面内；②判定点在平面内.模式.

公理 2 如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

应用：①确定两相交平面的交线位置；②判定点在直线上.

指出:今后所说的两个平面(或两条直线),如无特殊说明,均指不同的平面(直线).

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

应用：①确定平面；②证明两个平面重合.

实例:(1)门:两个合页,一把锁；(2)摄像机的三角支架；(3)自行车的撑脚.

知识点三　公理 3 的三条推论

推论 1 经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线有且只有一个平面.

【例题解析】

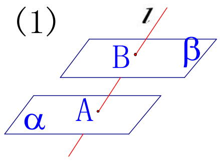
例 1、将下列符号语言转化为图形语言：

（1） $A\in\alpha$， $B\in\beta$， $A\in l$， $B\in l$；

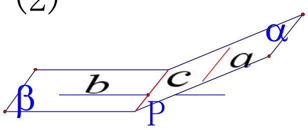
（2） $a\subset\alpha$， $b\subset\beta$， $a//c$， $b\bigcap c=p$， $\alpha\bigcap\beta=c$.

解：

(1)



(2)



说明：画图的顺序：先画大件（平面），再画小件（点、线）.

例 2、将下列文字语言转化为符号语言：

（1）点 A 在平面 α 内，但不在平面 β 内；（2）直线 a 经过平面 α 外一点 M；

（3）直线 l 在平面 α 内，又在平面 β 内.（即平面 α 和 β 相交于直线 l.）

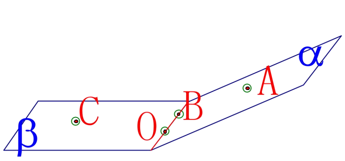
解：（1） $A\in\alpha$， $A\notin\beta$；（2） $M\in a$， $M\notin\alpha$；

（3） $l\in\alpha$， $l\in\beta$.（即 $\alpha\bigcap\beta=l$）

例 3、在平面 α 内有 A,O,B 三点，在平面 β 内有 B,O,C 三点，

试画出它们的图形.

答案：右图



例 4、判断下列命题是否正确。

1. 不共线的三点确定一个平面。（√）
2. 有三个公共点的两个平面重合。（√）
3. 三角形一定是平面图形。（√）
4. 平行四边形一定是平面图形。（√）
5. 四边形一定是平面图形。（×）
6. 不共线的四点确定一个平面。（×）

例 5、求证:三角形是平面图形.

已知：三角形 ABC

求证：三角形 ABC 是平面图形

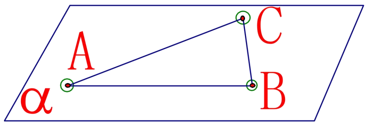
证明：∵三角形 ABC 的顶点 A、B、C 不共线

∴由公理 3 知，存在平面 α 使得 A、B、$C\in\alpha$

再由公理 1 知，AB、BC、$CA\subset\alpha$

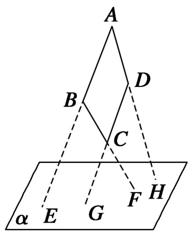
∴三角形 ABC 上的每一个点都在同一个平面内

∴三角形 ABC 是平面图形.



注：点共面问题

例 6、如图所示，四边形 ABCD 中，已知 AB∥CD，AB，BC，DC，AD(或延长线)分别与平面α相交于 E，F，G，H，求证：E，F，G，H 必在同一直线上.



证明 因为 AB∥CD，所以 AB，CD 确定平面 AC，AD∩α＝H，因为 H∈平面 AC，H∈α，由公理 3 可知，H 必在平面 AC 与平面α的交线上．同理 F、G、E 都在平面 AC 与平面α的交线上，因此 E，F，G，H 必在同一直线上.

注：点共线问题

例 7、点 $A\notin$ 平面 BCD，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 上的点，若 EH 与 FG 交于 P.

（这样的四边形 $ABCD$ 就叫做空间四边形）求证：P 在直线 BD 上.

证明：∵ $EH\cap FG=P$，∴ $P\in EH$，$P\in FG$，

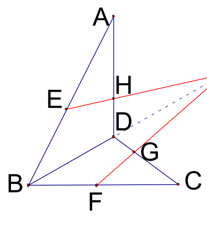
∵ E,H 分别属于直线 AB,AD，

∴ $EH\subset$ 平面 ABD，∴ $P\in$ 平面 ABD，

同理：$P\in$ 平面 CBD，

又∵平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=BD$，

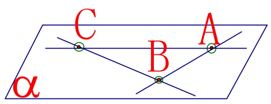
所以，P 在直线 BD 上.



注：线共点问题

例 8、两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一平面内.

已知：直线 AB,BC,CA 两两相交，交点分别为 A,B,C．求证：直线 AB,BC,CA 共面.



证法一：$\because$直线 $AB\cap AC=A$，$\therefore$直线 AB 和 AC 可确定平面 α，

$\because B\in AB$，$C\in AC$，$\therefore B\in\alpha$，$C\in\alpha$，

$\therefore BC\subset\alpha$，即 $AB,BC,CA\subset\alpha$

即直线 AB,BC,CA 共面.

证法二：因为 $A\notin$ 直线 BC 上，所以过点 A 和直线 BC 确定平面 α．（推论 1）

因为 $A\in$ α，$B\in BC$，所以 $B\in$ α．故 $AB\subseteq$ α，

同理 $AC\subseteq$ α，

所以 AB，AC，BC 共面．

证法三：

因为 A，B，C 三点不在一条直线上，所以过 A，B，C 三点可以确定平面 α．

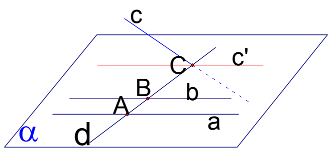
因为 $A\in$ α，$B\in$ α，所以 $AB\subseteq$ α．

同理 $BC\subseteq$ α，$AC\subseteq$ α，所以 AB，BC，CA 三直线共面．

问题：在这题中“且不过同一点”这几个字能不能省略，为什么？

注：线共面问题

例 9、已知直线 $a//b//c$，直线 d 与 a、b、c 分别相交于 A、B、C，求证：a、b、c、d 四线共面.



证明：因为 $a//b$，由推论 3，存在平面 α，使得

$a\subset\alpha,b\subset\alpha$

又因为直线 d 与 a、b、c 分别相交于 A、B、C，由公理 1，$d\subset\alpha$

下面用反证法证明直线 $c\subset\alpha$：

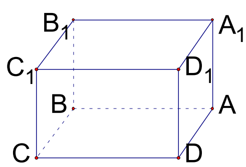
假设 $c\not\subset\alpha$，则 $c\cap\alpha=C$，在平面 α 内过点 C 作 $c'//b$，

因为 $b//c$，则 $c\,||\,c'$，此与 $c\cap c'=C$ 矛盾. 故直线 $c\subset\alpha$.

综上述，a、b、c、d 四线共面.

注：线共面问题

例 10、在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，① AA_1 与 CC_1 是否在同一平面内？②点 B,C_1,D 是否在同一平面内？③画出平面 AC_1 与平面 BC_1D 的交线，平面 ACD_1 与平面 BDC_1 的交线.



解：①在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$\because AA_1//CC_1$，$\therefore$由推论 3 可知，AA_1 与 CC_1 可确定平面 AC_1，

$\therefore AA_1$ 与 CC_1 在同一平面内.

②$\because$点 B,C_1,D 不共线，由公理 3 可知，点 B,C_1,D 可确定平面 BC_1D，

∴点 B,C_1,D 在同一平面内.

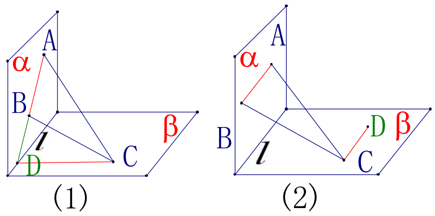
③∵ $AC\bigcap BD=O$，$D_1C\bigcap DC_1=E$，∴点 $O\in$ 平面 AC_1，$O\in$ 平面 BCD_1，

又 $C_1\in$ 平面 AC_1，$C_1\in$ 平面 BCD_1，∴平面 $AC_1\bigcap$ 平面 $BC_1D=OC_1$，

同理平面 $ACD_1\bigcap$ 平面 $BDC_1=OE$.

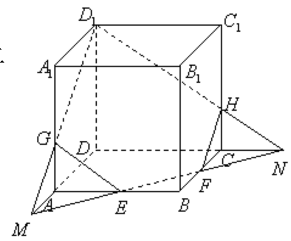
例 11、若 $\alpha\bigcap\beta=l$，$A,B\in\alpha$，$c\in\beta$，试画出平面 ABC 与平面 α,β 的交线.

解：（1）若 $AB\bigcap l=D$ 时，如图（1）；（2）若 $AB//l$ 时，如图（2）.



注：平面的交线问题

变式 1、如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CC_1 和 AA_1 上的中点，画出平面 BED_1F 与平面 ABCD 的交线.



解：在平面 AA_1D_1D 内，延长 D_1F，

∵ D_1F 与 DA 不平行，

因此 D_1F 与 DA 必相交于一点，设为 P，

则 P∈FD_1，P∈DA.

又∵ $FD_1\subset$ 平面 BED_1F，AD $\subset$ 平面 ABCD，

∴ P∈平面 BED_1F，P∈平面 ABCD.

又 B 为平面 ABCD 与平面 BED_1F 的公共点，

∴ 连接 PB，PB 即为平面 BED_1F，与平面 ABCD 的交线.

注：平面的交线问题

【训练题】

1．在下列六组条件中：

（1）空间三个点；（2）空间一条直线与一个点；（3）空间两条相交直线；

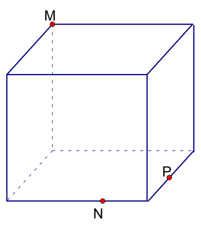
（4）三条平行直线与第四条直线都相交；（5）两两相交且不交于同一点的三条直线；

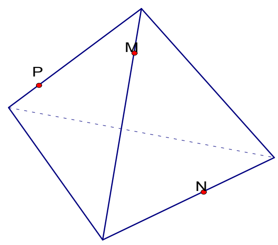
（6）三条直线中的一条与其余两条直线分别相交。

能确定一个平面的条件共有________个。

2．不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等，这样的平面 α 共有_______个。

3．画出下列几何体中过三点 M,N,P 的截面：





4．设不全等的△ABC 与△$A_1B_1C_1$ 不在同一平面内，且 $AB \parallel A_1B_1$，$BC \parallel B_1C_1$，$CA \parallel C_1A_1$. 求证：AA_1、BB_1、CC_1 三线共点.

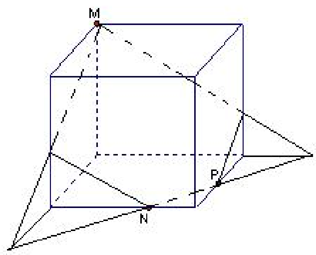
5．已知：a,b,c,d 是不共点且两两相交的四条直线，求证：a,b,c,d 共面.

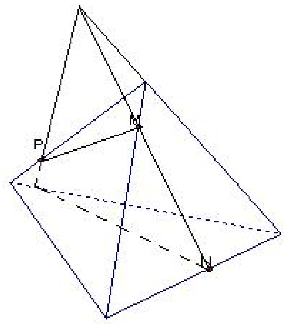
答案

1．3

2．7

3．





4．证明：不妨设 $AB \neq A_1B_1$，$AA_1 \cap BB_1 = S$，

∵$BC \parallel B_1C_1$，∴$BB_1 \subsetneqq$ 面 BCC_1B_1，$S \in$ 面 BBC_1B_1。同理，$S \in$ 面 ACC_1A_1.

∴$S \in CC_1$，即 AA_1、BB_1、CC_1 三线共点于 S.

5．证明：1° 若当四条直线中有三条相交于一点，不妨设 a,b,c 相交于一点 A，

但 $A \notin d$，如图 1.

（同例题 3）

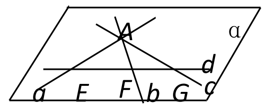


图 1

2° 当四条直线中任何三条都不共点时，如图 2.

∵这四条直线两两相交，则设相交直线 a,b 确定一个平面 α .

设直线 c 与 a,b 分别交于点 H,K，则 $H,K \in \alpha$.

又 $H,K \in c$，∴ $c \subsetneqq \alpha$.

同理可证 $d \subsetneqq \alpha$.

∴a，b，c，d 四条直线在同一平面 α 内.

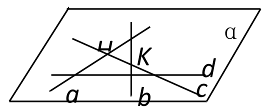


图 2

第二讲 空间直线与直线

【知识梳理】

1．公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

2．等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。

3．空间两条直线的位置关系：平行、相交、异面。

4．异面直线所成角的范围：（0，$\frac{\pi}{2}$]

5．异面直线之间的距离：异面直线公垂线段的长度。

知识点一　平行直线

1．**公理 4** ：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

符号表示：$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel c$

2．**等角定理：**如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

知识点二　异面直线

1．异面直线

⑴定义：不同在任何一个平面内的两直线叫做异面直线。

⑵特点：既不相交，也不平行。

⑶理解：①“不同在任何一个平面内”，指这两条直线永不具备确定平面的条件，因此，异面直线既不相交，也不平行，要注意把握异面直线的不共面性。

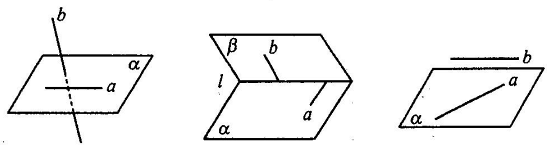
②“不同在任……”也可以理解为“任何一个平面都不可能同时经过这两条直线”。

③不能把异面直线误解为分别在不同平面内的两条直线为异面直线．也就是说，在两个不同平面内的直线，它们既可以是平行直线，也可以是相交直线．

2．异面直线的画法：为了充分显示出它们既不平行又不相交的特点，常常需要以辅助平面作为衬托，以加强直观性，如下图(l)，若画成如下图(2)的情形，就分不开了，千万不能画成(2)的图形。

(1)　　　　(2)

画平面衬托时，通常画成下图中的情形。



(1)　　　　(2)　　　　(3)

3、异面直线的判定

⑴**异面直线判定定理：**过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线．

⑵判定两条直线为异面直线的常用方法有：

①定义法：不同在任一平面内的两条直线．

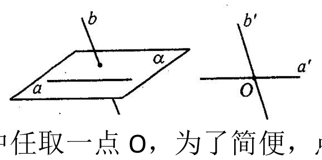
②定理法：过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线为异面直线．

③推论法：一条异面直线上两点与另一条异面直线上两点所连成的两条直线为异面直线．

④反证法：反证法是证明立体几何问题的一种重要方法，证明步骤有三步：一是提出与结论相反的假设；二是由此假设推出与题目条件或某一公理、定理或某一已被证明是正确的命题相矛盾结果；三是推翻假设，从而肯定与假设相反的结论，即命题的结论成立，

4、异面直线所成的角

a 与 b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 $a'//a$，$b'//b$，直线 a'和 b'所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a，b 所成的角．如下图所示．



⑴异面直线所成角θ的范围是 $0^\circ<\theta\leqslant90^\circ$；

(2)为了求异面直线 a，b 所成的角，可以在空间中任取一点 O，为了简便，点 O 常常取这里的点通常选择特殊位置的点，如线段的中点或端点或异面直线连线中点，也可以是异面直线中某一条上的一个特殊点. 将这个角放入某个三角形中计算这个角的大小，若该三角形是直角三角形、等腰三角形等特殊三角形，便易求此角的大小.

(3)我们规定：两条平行直线所成的角为 0° 角，两条相交直线所成的角为这两条相交直线

所成的四个角中的锐角（或直角），因此在空间中的两条直线所成的角的范围为(0°，90°]；特别地，若两异面直线所成角为 90°，则称两异面直线互相垂直；

(4)求异面直线所成角的一般步骤是：

①构造　恰当地选择一个点，用平移法构造异面直线所成的角.

②证明　证明①中所作出的角就是所求异面直线所成的角，

③计算　通过解三角形（常用余弦定理）等知识，求①中所构造的角的大小，

④结论　假如所构造的角的大小为α，若 0°<α≤90°，则α即为所求异面直线所成角的大小；若 90°<α<180°，则 180°－α即为所求。

【例题解析】

例 1．A 是△BCD 平面外的一点，E、F 分别是 BC、AD 的中点，

（1）求证：直线 EF 与 BD 是异面直线；

（2）若 $AC\perp BD$，$AC=BD$，求 EF 与 BD 所成的角.

1.（1）证明：用反证法。

设 EF 与 BD 不是异面直线，则 EF 与 BD 共面，从而 DF 与 BE 共面，即 AD 与 BC 共面，所以 A、B、C、D 在同一平面内，这与 A 是△BCD 平面外的一点相矛盾。

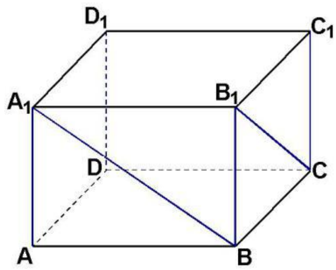
故直线 EF 与 BD 是异面直线。

（2）解：取 CD 的中点 G，连结 EG、FG，则 $EG\parallel BD$，

所以相交直线 EF 与 EG 所成的锐角或直角即为异面直线 EF 与 BD 所成的角。

在 Rt△EGF 中，求得∠FEG=45°，即异面直线 EF 与 BD 所成的角为 45°。

例 2. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DA=DC=4,\quad DD_1=3$，求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



2.　[解] 连接 A_1D，

$\because\ A_1D\parallel B_1C,\ \therefore\ \angle BA_1D$ 为异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角.

连接 BD，在△ A_1DB 中，$A_1B=A_1D=5,\quad BD=4\sqrt{2}$，

则 $\cos\angle BA_1D=\dfrac{A_1B^2+A_1D^2-BD^2}{2\cdot A_1B\cdot A_1D}=\dfrac{25+25-32}{2\cdot5\cdot5}=\dfrac{9}{25}$.

$\therefore$异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{9}{25}$.

例 3．直三棱柱 $A_1B_1C_1$—ABC，∠BCA=90^0，点 D_1、F_1 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点，BC=CA=CC_1，求 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值。

3．解：（1）连结 D_1F_1，则 $D_1F_1 \underline{\parallel} \frac{1}{2}B_1C_1$，∵BC $\underline{\parallel}$ B_1C_1 ∴$D_1F_1 \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$

设点 E 为 BC 中点，∴$D_1F_1 \underline{\parallel}$ BE，∴$BD_1\parallel EF_1$，

∴∠EF_1A 或其补角即为 BD_1 与 AF_1 所成的角。由余弦定理可求得 $\cos\angle EF_1A=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$。

例 4．长方体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$，且 $a>b$，求：

（1）下列异面直线之间的距离：AB 与 CC_1；AB 与 A_1C_1；AB 与 B_1C；

（2）异面直线 D_1B 与 AC 所成角的余弦值。

4.（1）解：BC 为异面直线 AB 与 CC_1 的公垂线段，故 AB 与 CC_1 的距离为 b.

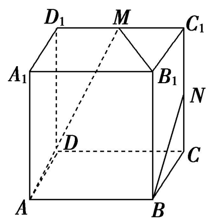
AA_1为异面直线 AB 与 A_1C_1 的公垂线段，故 AB 与 A_1C_1 的距离为 c。
过 B 作 $BE\perp B_1C$，垂足为 E，则 BE 为异面直线 AB 与 B_1C 的公垂线，
$BE=\dfrac{BB_1\cdot BC}{B_1C}=\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$，即 AB 与 B_1C 的距离为 $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

（2）解法一：连结 BD 交 AC 于点 O，取 DD_1 的中点 F，连结 OF、AF，则 $OF\parallel D_1B$，
∴$\angle AOF$ 就是异面直线 D_1B 与 AC 所成的角.
∵$AO=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，$OF=\dfrac{1}{2}$ $BD_1=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$，$AF=\dfrac{\sqrt{4b^2+c^2}}{2}$，
∴在△AOF 中，$\cos\angle AOF=\dfrac{AO^2+OF^2-AF^2}{2AO\cdot OF}=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

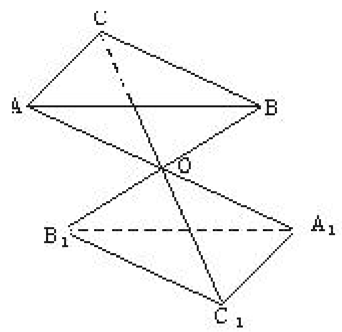
解法二：如图，在原长方体的右侧补上一个同样的长方体，连结 BG、D_1G，则 $AC\parallel BG$，
∴$\angle D_1BG$（或其补角）为 D_1B 与 AC 所成的角.

$BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$BG=\sqrt{a^2+b^2}$，$D_1G=\sqrt{4a^2+c^2}$，
在△D_1BG 中，$\cos\angle D_1BG=\dfrac{D_1B^2+BG^2-D_1G^2}{2D_1B\cdot BG}=-\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$，
故所求角的余弦值为$\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

例 5、正方体 ABCD－A1B1C1D1 中，M、N 分别为棱 C1D1、C1C 的中点，有以下四个结论：



①直线 AM 与 CC1 是相交直线； ②直线 AM 与 BN 是平行直线；
③直线 BN 与 MB1 是异面直线； ④直线 AM 与 DD1 是异面直线.
其中正确的结论为________. (注：把你认为正确的结论的序号都填上)
答案：③④



例 6．如图，设△ABC 和△$A_1B_1C_1$ 的三对对应顶点的连线 AA_1、BB_1、

CC_1相交于一点 O，且 $\frac{AO}{OA_1}=\frac{BO}{OB_1}=\frac{CO}{OC_1}=\frac{2}{3}$，试求 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}$ 的值。

解：依题意，因为 AA_1、BB_1、CC_1 相交于一点 O，且 $\frac{AO}{OA_1}=\frac{BO}{OB_1}=\frac{CO}{OC_1}$，

所以 $AB /\!/ A_1B_1$，$AC /\!/ A_1C_1$，$BC /\!/ B_1C_1$。

由等角定理得∠BAC=∠$B_1A_1C_1$，∠ABC=∠$A_1B_1C_1$，

△ABC∽△$A_1B_1C_1$，所以 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

例 7．已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2a$，$AA_1=a$，E、F 分别是 A_1B_1 和 BB_1 的中点，求：（1）EF 与 AD_1 所成角的余弦值；

（2）AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值 。

解：（1）连结 D_1C、AC，则∠AD_1C 就是 EF 与 AD_1 所成的角(或补角)，∠$AD_1C=\arccos\frac{1}{5}$。

（2）用一个同样的长方体放置在原长方体的下部，

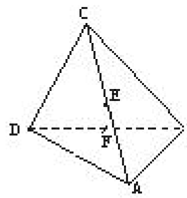
连结 A_2C，则 $A_2C/\!/AC_1$，再连结 A_2B_1，∠A_2CB_1 就是 AC_1 与 B_1C 所成的角(或补角)，

∠$A_2CB_1=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$。

【训练题】

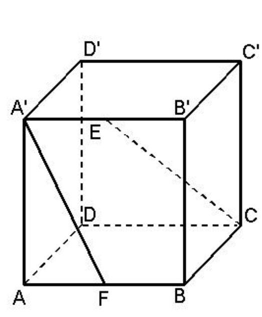
1．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，E、F 分别是 CC_1、AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于________

2. 如图，四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AC、BD 的中点，若 $CD=2AB=2$，$EF\perp AB$，则 EF 与 CD 所成的角等于_____________.



3.（2007 年上海高考题）在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种． 已知 α，β 是两个相交平面，空间两条直线 l_1，l_2 在 α 上的射影是直线 s_1，s_2，l_1，l_2 在 β 上的射影是直线 t_1，t_2．用 s_1 与 s_2，t_1 与 t_2 的位置关系，写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件：______________________________________.

4. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E、F 分别是 $A'B'$ 和 AB



的中点，求异面直线 $A'F$ 与 CE 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.

【答案】

1．解法一：取面 CC_1D_1D 的中心为 H，连结 FH、D_1H.在△FHD_1 中，

$FD_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$FH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$D_1H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由余弦定理，得∠D_1FH 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

解法二：取 BC 的中点 G.连结 $GC_1 // FD_1$，再取 GC 的中点 H，连结 HE、OH，则∠OEH 为异面直线所成的角.

在△OEH 中，$OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$HE=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，$OH=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

由余弦定理，可得 $\cos\angle OEH=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$。

2．30°

3．$s_1 // s_2$，并且 t_1 与 t_2 相交（$t_1 // t_2$，并且 s_1 与 s_2 相交）

4． 连接 EB，∵ $A'E // BF$，且 $A'E=BF$，

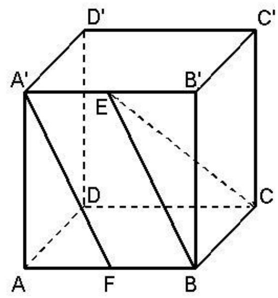
∴ $A'FBE$ 是平行四边形，则 $A'F // EB$，

∴ 异面直线 $A'F$ 与 CE 所成的角就是 CE 与 EB 所成的角。

由 $CB\perp$ 平面 $ABB'A'$，得 $CB\perp BE$.

在 Rt△CEB 中，$CB=2,\quad BE=\sqrt{5}$，则 $\tan\angle CEB=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴ $\angle CEB=\arctan\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



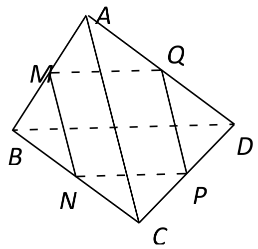
∴ 异面直线 $A'F$ 与 CE 所成角的大小为 $\arctan\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

第三讲 空间直线与平面

【知识梳理】

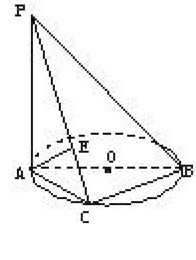
1．直线在平面内、直线和平面相交、直线和平面平行
2.（1）判定定理：如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.
（2）性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.
3.（1）判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于一个平面，那么这两个平面平行。
（2）性质定理：
①如果两个平面平行，那么其中一个平面内的直线平行于另一个平面。
②如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.
4.（1）定义：如果一条直线 l 和一个平面 α 相交，并且和平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 和平面 α 互相垂直。记作：$l \perp \alpha$.
（2）判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。
（3）性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。
5. 直线与平面所成角：设直线与平面所成角 θ：
（1）直线与平面平行或直线在平面内，则 $\theta=0$；
（2）直线与平面垂直，则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$；
（3）直线是平面的斜线，则 θ 定义为平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

【例题解析】
1．如图，已知 M、N、P、Q 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点.
求证：（1）线段 MP 和 NQ 相交且互相平分；（2）AC∥平面 MNP，BD∥平面 MNP.



1．证明：（1）∵M、N 是 AB、BC 的中点，∴MN∥AC，$MN=\dfrac{1}{2}AC$.
∵P、Q 是 CD、DA 的中点，∴PQ∥CA，$PQ=\dfrac{1}{2}CA$.
∴MN∥QP，$MN=QP$，$MNPQ$ 是平行四边形.
∴□$MNPQ$ 的对角线 MP、NQ 相交且互相平分.
（2）由(1)，AC∥MN．记平面 $MNPQ$ 为 α．显然 $AC\not\subset\alpha$.
否则，若 $AC\subsetneq\alpha$，
由 $A\in\alpha$，$M\in\alpha$，得 $B\in\alpha$；
由 $A\in\alpha$，$Q\in\alpha$，得 $D\in\alpha$，则 A、B、C、$D\in\alpha$，
与已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形矛盾.
又∵$MN\subsetneq\alpha$，∴AC∥α，
又 $AC\not\subset\alpha$，∴AC∥α，即 AC∥平面 $MNPQ$.

2．已知 $PA\perp$⊙O 所在的平面，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上任意一点，过 A 点作 $AE\perp PC$ 于点 E，求证：$AE\perp$平面 PBC.



2．证明：∵$PA\perp$平面 ABC，∴$PA\perp BC$.

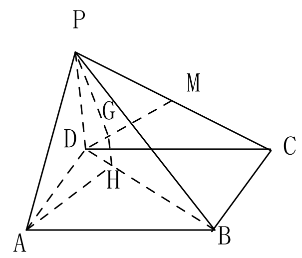
又∵AB 是⊙O 的直径，∴$BC\perp AC$，而 $PC\cap AC=C$，∴$BC\perp$平面 PAC.

又∵AE 在平面 PAC 内，∴$BC\perp AE$.

∵$PC\perp AE$，且 $PC\cap BC=C$，

∴$AE\perp$平面 PBC.

3．已知 ABCD 是四边形，点 P 是平面 ABCD 外一点，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH，求证：$AP // GH$ 。

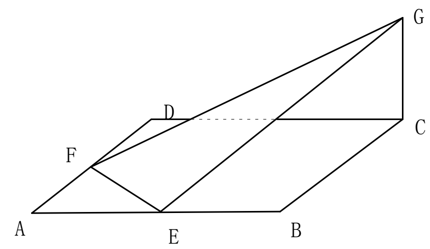


3．证明：设 AC$\bigcap$BD=O，连 OM，因为 M 是 PC 的中点，所以 OM//AP，

所以 AP//平面 BDM，因为 AP$\subsetneqq$面 APG 且面 APG$\cap$面 BDM=GH，

所以 $AP // GH$ 。

4．已知 ABCD 为边长是 4 的正方形，E,F 分别是 AB,AD 的中点，GC 垂直于 ABCD 所在的平面，且 GC=2，求 B 到平面 EFG 的距离。



4.解:连接 AC 交 EF 于 M，∵ E,F 分别是 AB,AD 的中点，$\therefore EF // BD$，

$\therefore BD // 平面EFG$，

$\because$ $EF\perp GC$，$EF\perp AC$，且 $GC\bigcap AC=C$，

$\therefore EF\perp 平面MGC$，$\therefore EF\perp OH$.

过 O 作 $OH\perp MG$，所以 $OH\perp 平面EFG$.

所以，OH 是点 B 到平面 EFG 的距离。

$\because \Delta MHO$ 与 ΔMCG，$\therefore \dfrac{OH}{GC}=\dfrac{MO}{MG}$，$\therefore OH=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

5．在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD=BC=1$，$CD=\sqrt{2}$，且 $\angle BCD=90^0$，求：

（1）A 到平面 BCD 的距离；

（2）AC 与平面 BCD 所成的角。

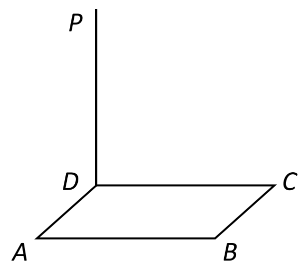
5．解:（1）过 A 作 $AO\perp 平面BCD$，由 $AB=AC=AD$ 得 $BO=CO=DO$，

即 O 为 ΔBCD 的外心，又 $\angle BCD=90^0$，故 O 在 BD 的中点上，$AO=\dfrac{1}{2}$。

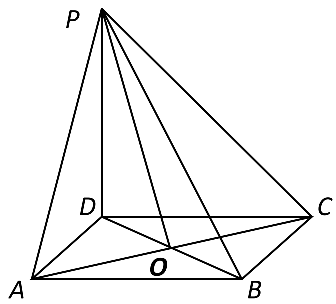
（2）$\because$ $AO\perp 平面BCD$，所以 $\angle ACO$ 为所求角，$\sin\angle ACO=\dfrac{1}{2}$，

所以 AC 与平面 BCD 所成的角为 30^{0}。

6．已知边长为 6 的正方形 *ABCD* 所在平面外一点 *P*，*PD*⊥平面 *ABCD*，*PD*=8，
(1)连接 *PB*、*AC*，证明：$PB\perp AC$；
(2)连接 *PA*，求 *PA* 与平面 *PBD* 所成的角的大小；
(3)求点 *D* 到平面 *PAC* 的距离。



6．(1)证明：连接 *BD*，在正方形 *ABCD* 中，$AC\perp BD$，
又 *PD*⊥平面 *ABCD*，所以，*PD*⊥*AC*，
所以 $AC\perp$平面 *PBD*，故 $PB\perp AC$。



(2) 解：因为 $AC\perp$平面 *PBD*，设 *AC* 与 *BD* 交于 *O*，连接 *PO*，
则∠*APO* 就是 *PA* 与平面 *PBD* 所成的角，
在Δ*APO* 中，$AO=3\sqrt{2}$，$AP=10$，
所以 $\sin\angle APO=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，$\angle APO=\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$，
∴ *PA* 与平面 *PBD* 所成的角的大小为 $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$。
(3)解：连接 *PC*，设点 *D* 到平面 *PAC* 的距离为 *h*，
则有 $V_{D-PAC}=V_{P-ACD}$，即 $\frac{1}{3}\times S_{\Delta PAC}\times h=\frac{1}{6}\times PD\times AD\times DC$
在Δ*PAC* 中，显然 *PO*⊥*AC*，$PO=\sqrt{82}$，$h=\frac{24\sqrt{41}}{41}$，
所以点 *D* 到平面 *PAC* 的距离为 $\frac{24\sqrt{41}}{41}$。

【训练题】
1．设直线 m,n 和平面 α,β，则下列命题中，正确的是（　　）
$(A)m//n,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow\alpha//\beta$　　　　(B)$m\perp\alpha,m\perp n,n\subset\beta\Rightarrow\alpha//\beta$
(C)$m\perp n,m//\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$　　　　(D)$m\perp\alpha,m//n\Rightarrow n\perp\alpha$
2. 已知 *a*、*b* 为不垂直的异面直线，α 是一个平面，则 *a*、*b* 在 α 上的射影有可能是
①两条平行直线；②两条互相垂直的直线；③同一条直线；④一条直线及其外一点.
在上面结论中，正确结论的编号是__________.（写出所有正确结论的编号）
3. 四面体 $ABCD$ 中，$AC=BD,E,F$ 分别为 AD,BC 的中点，且 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\angle BDC=90^{\circ}$，求证：$BD\perp$平面 ACD.

4．设 PA、PB、PC 是从点 P 引出的三条射线，每两条的夹角都等于 60°，则直线 PC 与平面 APB 所成角的余弦值是____________
5．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2,AA_1=1$，则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为__________.
6．已知线段 AB 不在平面 α 内，A、B 两点到平面 α 的距离分别是 1 和 3，那么线段 AB 的中

点到平面α的距离是__________.

7．山脚平地上有一条笔直的公路，在公路上A、B、C三点依次测得山顶P的仰角为30^0、45^0、60^0，已知$AB=BC=1km$，求山高PH。

【答案】

1．D；　　2．①②④；

3．证明：取CD的中点G，连结EG,FG，

$\because E,F$分别为AD,BC的中点，$\therefore EG \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AC$，$FG \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}BD$，

又$AC=BD,\therefore FG=\frac{1}{2}AC$，$\therefore$在$\Delta EFG$中，$EG^2+FG^2=\frac{1}{2}AC^2=EF^2$

$\therefore EG\perp FG$，$\therefore BD\perp AC$，又$\angle BDC=90^\circ$，即$BD\perp CD$，$AC\cap CD=C$

$\therefore BD\perp$平面ACD.

4．$\frac{\sqrt{3}}{3}$；　　5．$\frac{\sqrt{10}}{5}$；　　6．2 或 1

7．解：$\angle PAH=30^0$，$\angle PBH=45^0$，$\angle PCH=60^0$，

设$PH=h$，则$PA=2h,PB=\sqrt{2}h,PC=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$.

在ΔPAB中，$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cdot\cos\angle PBA$，①

在ΔPBC中，$PC^2=PB^2+BC^2-2PB\cdot BC\cdot\cos\angle PBC$，②

由$\angle PBA=180^0-\angle PBC$，$\cos\angle PBA=-\cos\angle PBC$，且$AB=BC=1$.

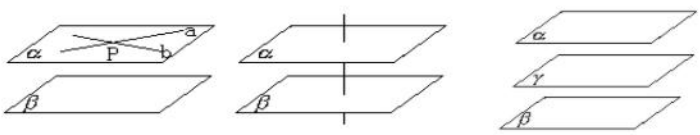
①＋②得，$4h^2+\frac{4}{3}h^2=2h^2+2h^2+2$，解方程得$h=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即山高$PH$为$\frac{\sqrt{6}}{2}km$.

高二数学 第四讲 空间平面与平面

【知识梳理】

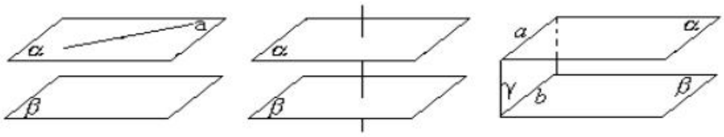
1. 平面与平面平行（没有公共点）

⑴判定定理



$\left.\begin{array}{l} a、b\subset\alpha \\ a\cap b=\mathrm{P} \\ a\parallel\beta,b\parallel\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$；　$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ \\ l\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$；　$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\gamma \\ \\ \beta\parallel\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

⑵性质定理



$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\beta$；　$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ l\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\beta$；　$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ \gamma\cap\alpha=a \\ \gamma\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

2. 平面与平面垂直

(1)判定定理：$\left.\begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$；

(2)性质定理：$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = l \\ a \subset \alpha, a \perp l \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$

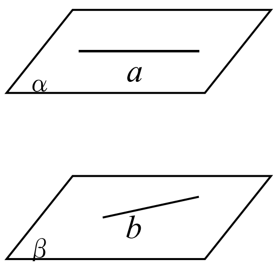
3．二面角：当两个平面相交时，它们的交线l将各平面分割成两个半平面，由两个半平面α、β及交线l所组成的空间图形叫做二面角，记作$\alpha - l - \beta$，交线l叫做二面角的棱，两个半平面α、β叫做二面角的面。

4．二面角的平面角：在二面角的棱AB上任取一点O，过O分别在面α和β内作棱l的垂线OM和ON，则射线OM和ON所成的角叫做二面角$\alpha - l - \beta$的平面角。

【例题解析】

例 1.　已知直线a、b异面，平面α过a且平行于b，平面β过b且平行于a，

求证：$\alpha \parallel \beta$



分析：线面平行 $\Leftrightarrow$ 线线平行 $\Leftrightarrow$ 线面平行 $\Leftrightarrow$ 面面平行

证明：过a作平面γ，使$\gamma \cap \beta = a'$

$\because a \parallel \beta$，$a \subset \gamma$，$\gamma \cap \beta = a'$，$\therefore a \parallel a'$

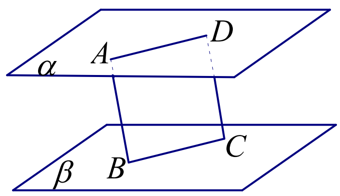
又$\because a' \not\subset \alpha$，$a \subset \alpha$，$\therefore a' \parallel \alpha$且$b \parallel \alpha$

又a、b异面，$\therefore a'$与b必相交，$\therefore \alpha \parallel \beta$。

例 2．夹在两个平行平面间的两条平行线段相等。

已知：$\alpha // \beta$，AB, CD是夹在两个平行平面α, β间的平行线段，

求证：$AB = CD$。



证明：$\because AB // CD$，$\therefore$ AB, CD确定平面AC，

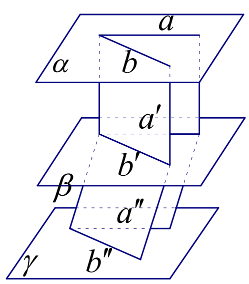
$\therefore$平面$AC \cap \alpha = AD$，平面$AC \cap \beta = BC$，

$\therefore$ $AD // BC$，四边形$ABCD$是平行四边形。$\therefore$ $AB = CD$。

例 3．若$\alpha // \beta$，$\beta // \gamma$，则$\alpha // \gamma$。

证明：在平面α内取两条相交直线a, b，

分别过a, b作平面φ, δ，使它们分别与平面β交于两相交直线a', b'，



$\because \alpha // \beta$，$\therefore a // a', b // b'$，

又$\because \beta // \gamma$，同理在平面γ内存在两相交直线a'', b''，

使得$a' // a'', b' // b''$，

$\therefore a // a'', b // b''$，

$\therefore \alpha // \gamma$。

例 4. 关于直线 m、n 及平面 α、β，下列命题中正确的是（　　）

A. 若 $m//\alpha, \alpha \cap \beta = n$，则 $m//n$　　B. 若 $m \perp \alpha, m//\beta$，则 $\alpha \perp \beta$

C. 若 $m//\alpha, n//\alpha$，则 $m//n$　　D. 若 $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$，则 $m \perp \beta$

【解析】

若 $m//\alpha$，$\alpha \cap \beta = n$，则 m 与 n 的关系是平行、异面，故 A 错误；

因为 $m//\beta$,所以存在 $n \subset \beta$ 使 $n//m$,因为 $m \perp \alpha$,所以 $n \perp \alpha$,则 $\alpha \perp \beta$,故 B 正确,

若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 m 与 n 的关系为平行、相交或异面，故 C 错误；

若 $m \subset \alpha$，$\alpha \perp \beta$，则 m 与 β 的关系是平行、相交（含垂直），$m \subset \beta$，故 D 错误

故选:B

例 5．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过对角线 BD_1 作平面 α 交棱 AA_1 于点 E，交棱 CC_1 于点 F，则：①四边形 BFD_1E 一定是平行四边形；②四边形 BFD_1E 有可能为正方形；

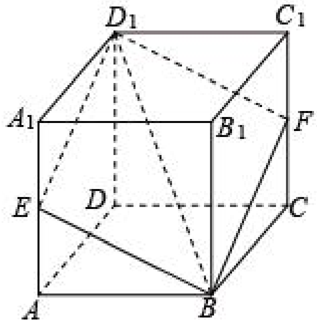
③四边形 BFD_1E 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形；

④平面 BFD_1E 有可能垂直于平面 BB_1D_1D.其中所有正确结论的序号为（　　）

A. ①②　　B. ②③④　　C. ①④　　D. ①③④

【解析】

如图：



①由平面 BCB_1C_1 // 平面 ADA_1D_1，并且 B、E、F 、D_1 四点共面，

$\therefore ED_1 // BF$，同理可证，$FD_1 // EB$，故四边形 BFD_1E 一定是平行四边形，

故①正确；

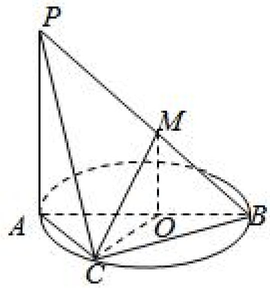
②若 BFD_1E 是正方形，有 $ED_1 \perp BE$，因为 $A_1D_1 \perp BE$，所以 $BE \perp$ 平面 ADD_1A_1，又因为 $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1，与经过平面外一点作已知平面的垂线有且只有一条相矛盾,故②错误；

③由图得，BFD_1E 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形 $ABCD$，故③正确；

④当点 E 和 F 分别是对应边的中点时，平面 $BFD_1E \perp$ 平面 BB_1D_1D，故④正确.

故选：D

例 6．如图,*AB* 为圆 *O* 的直径,点 *C* 在圆周上(异于点 *A*,B),直线 *PA* 垂直于圆 *O* 所在的平面,点 *M* 是线段 *PB* 的中点·有以下四个命题：



① MO // 平面 PAC；② PA // 平面 MOB；

③ $OC \perp$ 平面 PAC；④平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.

其中正确的命题的序号是______.

【解析】

对①,因为 M, O 为 BP, BA 的中点,故 MO 为三角形 BPA 的中位线,故 MO // 平面 PAC.

故①正确.

对②,因为 $PA \subseteq$ 平面 MOB,故②错误.

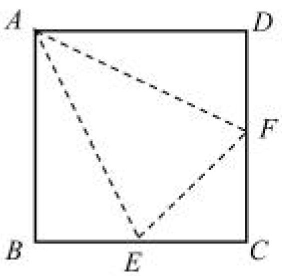
对③,因为 $BC \perp AC$,故 OC 不会垂直于 AC,故 OC 不垂直于平面 PAC.故③错误

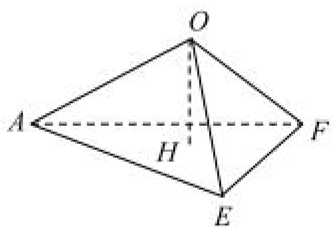
对④, 因为 $BC \perp AC$, $PA \perp$ 面 ABC,故 $PA \perp BC$.又 $PA \cap AC = A$.

故 BC 平面 $\perp PAC$,又 $BC \subseteq$ 平面 PBC,故平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.故④正确.

故答案为①④

例 7．如图，*E*，*F* 分别为边长为 2 的正方形 *ABCD* 的边 *BC*，*CD* 的中点，沿图中虚线折起，使得 *B*，*C*，*D* 三点重合于点 *O*，点 *O* 在平面 *AEF* 上的射影 *H*.





（1）求证：面 $OEF \perp$ 面 *OEA*；

（2）求证：点 H 是 $\triangle AEF$ 的垂心；

【解析】

（1）因为 $\angle EOF=\angle AOF=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $OF\perp OA,OF\perp OE$，

又 $OA\cap OE=O$，所以 $OF\perp$ 平面 AOE，

又 $OF\subset$ 平面 OEF，所以面 $OEF\perp$ 面 OEA

（2）连接 AH，延长交 EF 于 G，

因为 $AO\perp OE,AO\perp OF$，且 $OE\cap OF=O$，

所以 $AO\perp$ 平面 OEF，所以 $AO\perp EF$，

因为 H 是 O 在平面 AEF 上的射影，所以 $OH\perp$ 平面 AEF，

所以 $OH\perp EF$，

因为 $AO\cap OH=O$，所以 $EF\perp$ 平面 AOH，所以 $EF\perp AH$，

同理可证 $AF\perp EH$，

所以点 H 是 $\triangle AEF$ 的垂心

例 8. 点 A 是平面 BCD 外一点，$AB=AC=AD=BC=CD=BD$，求二面角 $B-AC-D$ 的大小。

【解析】取 AC 的中点 E，连接 BE,DE，

$\Delta ABC,\Delta ACD$ 都是等边三角形，$\therefore BE\perp AC,DE\perp AC$，

$\therefore \angle BED$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角。

设 $AB=m$，则 $BD=m$，$BE=DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$，由余弦定理得 $\cos\angle BDE=\dfrac{1}{3}$，

所以二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $\arccos\dfrac{1}{3}$。

小结：知识、方法：本题通过定义法作二面角的平面角。

注意：求二面角的大小须先指出哪一个角是二面角的平面角，再进行计算。

例 9．二面角 $\alpha-l-\beta$ 内有一点 P，若 P 到平面 α,β 的距离分别是 $5,8$，且 P 在平面 α,β 的内的射影的距离为 7，求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小。

解：作 $PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，垂足分别为 A,B，平面 PAB 交 α 于 AC，交 β 于 BC，

$\because PA\perp\alpha$，$\therefore l\perp PA$，同理 $l\perp PB$，$\therefore l\perp$ 平面PAB，

$\therefore l\perp AC,l\perp BC$，即 $\angle ACB$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角。

在 ΔPAB 中，由余弦定理得 $\cos\angle APB=\dfrac{1}{2}$，$\angle APB=60^0$，

$\therefore \angle ACB=120^0$，即二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 120^0。

小结：知识、方法：本题通过垂面法作二面角的平面角。

注意：过二面角内一点作垂直于棱的平面，该平面与二面角的两个半平面的交线所成的角就是所求的角。这个角与两个半平面的垂线所成角互补。

例 10．在ΔABC 中，∠A＝９０°，AB=4，AC=3，平面ＡＢＣ外一点Ｐ在平面ＡＢＣ内的射影是ＡＢ的中点Ｍ，二面角Ｐ－ＡＣ－B 的大小为４５°。求：
（1）二面角Ｐ－ＢＣ－Ａ的大小；（2）求二面角Ｃ－ＰＢ－Ａ的大小。
解：（１）∵ＰＭ⊥平面ＡＢＣ，AC⊥AB，∴ＡＣ⊥ＰＡ，
∴∠PAB 是二面角Ｐ－ＡＣ－Ｂ的平面角．即∠ＰＡＢ＝４５°，又 AM=$\frac{1}{2}$AB=2，
作ＭD⊥BC 于 D，连 PD，则 PD⊥BC，故∠PDM 是二面角 P－BC－A 的平面角。
∵RtΔMBD∽RtΔCAB，　∴ $\frac{BM}{BC}=\frac{MD}{AC}$，　又$BC=5$，∴MD=$\frac{6}{5}$，
在 RtΔPDM 中，tan∠PDM=$\frac{PM}{DM}=\frac{5}{3}$，故∠PDM=arctan$\frac{5}{3}$，
即二面角 P－BC－A 的大小为 arctan$\frac{5}{3}$。

（2）∵PM⊥平面 ABC，BM=MA，∴PA=PB，又∠PAB=$\frac{\pi}{4}$，∴PB⊥PA，
又 PM⊥平面 ABC，BM⊥AC，　∴PB⊥AC，故 PB⊥平面 PAC，
∴PB⊥PC，因此∠APC 是二面角 C－PB－A 的平面角。
在 R_tΔPAC 中，∠PAC=90^0，AC=3，PA=$\sqrt{2}AM=2\sqrt{2}$，∴tan∠APC=$\frac{AC}{PA}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，
故∠APC=arctan$\frac{3\sqrt{2}}{4}$。因此二面角 C－PB－A 的大小为 arctan$\frac{3\sqrt{2}}{4}$。
小结：知识、方法：本题中找二面角Ｐ－ＢＣ－Ａ的平面角是通过三垂线的方法，这是作二面角平面角的常用方法。

例 11．已知 E 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 CC_1 的中点，求平面 A_1BE 与平面 $ABCD$ 所成角。
解：设正方体的棱长为 1，$AC_1=\sqrt{2}$，$C_1E=\frac{1}{2}$，$\therefore A_1E=\frac{3}{2}$，
由余弦定理得 $\cos\angle EA_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \sin\angle EA_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
设平面 A_1BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BE}}=\frac{2}{3}$，
所以平面 A_1BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\arccos\frac{2}{3}$。
小结：知识、方法：本题通过面积射影的方法求二面角的大小，射影面积与原面积之比即为二面角平面角的余弦值。当作二面角的平面角有困难时，如果能找得斜面面积的射影面积，可直接应用公式，求出二面角的大小。

【训练题】
1．已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\theta(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$，$AB\subsetneqq\alpha$，$CD\subsetneqq\beta$，且 $AB\perp l$，$CD\perp l$，若 AB 与 CD 所成的角为 φ，则（　　）
（A）$\varphi=\theta$　　（B）$\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}$　　（C）$\varphi=\theta+\frac{\pi}{2}$　　（D）$\varphi=\pi-\theta$

2．设锐二面角$\alpha-l-\beta$的大小为θ，m是α内异于l的一条直线，则m与β所成角的范围是______________.

3．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，平面A_1BD与平面C_1BD所成角的余弦值等于______

4．已知E,F分别是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱BC,CC_1的中点，则截面$AEFD_1$与底面$ABCD$所成二面角的正弦值是____________

5．设S为ΔABC所在平面外一点，平面SAB、SBC、SCA与ΔABC所在平面所成的二面角都相等，问点S在平面ABC内的射影是ΔABC的_______心。

6．已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小是60^0，面α内的一点A到棱l的距离为$2\sqrt{3}$，则A到面β的距离是__________.

7．已知二面角$\alpha-l-\beta$的平面角为θ，在平面α内若有一条射线AB与棱l成锐角δ，与平面β成角γ，则必有（　　）

（A）$\sin\theta\sin\delta=\sin\gamma$　　（B）$\sin\theta\sin\delta=\cos\gamma$

（C）$\cos\theta\cos\delta=\sin\gamma$　　（D）$\cos\theta\cos\delta=\cos\gamma$

8．山坡与水平面成30^0角，坡面上有一条与坡角水平线成30^0角的直线小路，某人沿小路上坡走了一段路程后升高了100米，则此人行走的路程为___________米。

【答案】

1．D　　2．$[0,\theta]$　　3．$\dfrac{1}{3}$　　4．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

5．内　　6．3　　7．A　　8．400

高二数学 第五讲 空间直线与平面复习

【知识梳理】

一、异面直线所成的角

等角定理及其推论

定理:若一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，则这两个角相等.

推论:若两条相交直线和另两条相交直线分别平行,则这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

异面直线所成的角

(1)定义：a、b是两条异面直线，经过空间任意一点O，分别引直线a′∥a,b′∥b,则a′和b′所成的锐角(或直角)叫做异面直线a和b所成的角.

(2)取值范围：0°＜θ≤90°.

(3)求解方法

①根据定义，通过平移，找到异面直线所成的角θ；

②解含有θ的三角形，求出角θ的大小.

二、直线和平面所成的角

(1)定义　和平面所成的角有三种：

(i)垂线　面所成的角　的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

(ii)垂线与平面所成的角　直线垂直于平面，则它们所成的角是直角.

(iii)一条直线和平面平行，或在平面内，则它们所成的角是0°的角.

(2)取值范围：$0° \leqslant \theta \leqslant 90°$

(3)求解方法

①作出斜线在平面上的射影，找到斜线与平面所成的角θ.

②解含θ的三角形，求出其大小.

三、二面角及二面角的平面角:

(1)半平面　直线把平面分成两个部分，每一部分都叫做半平面.

(2)二面角　一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱，这两个平面叫做二面角的面，即二面角由半平面一棱一半平面组成.

二面角的平面角θ的取值范围是$0° < \theta \leqslant 180°$

(3)二面角的平面角

①以二面角棱上任意一点为端点，分别在两个面内作垂直于棱的射线，这两条射线所组成的角叫做二面角的平面角.

②二面角的平面角具有下列性质：

(i)二面角的棱垂直于它的平面角所在的平面，即AB⊥平面PCD.

(ii)从二面角的平面角的一边上任意一点(异于角的顶点)作另一面的垂线，垂足必在平面角的另一边(或其反向延长线)上.

(iii)二面角的平面角所在平面与二面角的两个面都垂直，即平面PCD⊥α，
平面PCD⊥β.

③找(或作)二面角的平面角的主要方法.

(i)定义法

(ii)垂面法

(iii)三垂线法

(Ⅳ)根据特殊图形的性质

(4)求二面角大小的常见方法

①先找(或作)出二面角的平面角θ，再通过解三角形求得θ的值.

②利用面积射影定理$S'=S\cdot\cos\alpha$

其中S为二面角一个面内平面图形的面积，S′是这个平面图形在另一个面上的射影图形的面积，α为二面角的大小.

四、点到平面的距离

(1)定义 ：平面外一点引一个平面的垂线，这个点和垂足间的距离叫做点到这个平面的距离.

(2)求点面距离常用的方法：

1)直接利用定义求

①找到(或作出)表示距离的线段；

②抓住线段(所求距离)所在三角形解之.

2)利用两平面互相垂直的性质.即如果已知点在已知平面的垂面上，则已知点到两平面交线的距离就是所求的点面距离.

3)体积法其步骤是：①在平面内选取适当三点，和已知点构成三棱锥；②求出此三棱锥的体积V和所取三点构成三角形的面积S；③由$V=\frac{1}{3}S\cdot h$，求出h即为所求.这种方法的优点是不必作出垂线即可求点面距离.难点在于如何构造合适的三棱锥以便于计算.

4)转化法将点到平面的距离转化为(平行)直线与平面的距离来求.

二、直线和平面的距离

(1)定义一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做这条直线

和平面的距离.

(2)求线面距离常用的方法

①直接利用定义求证(或连或作)某线段为距离，然后通过解三角形计算之.

②将线面距离转化为点面距离，然后运用解三角形或体积法求解之.

③作辅助垂直平面，把求线面距离转化为求点线距离.

三、平行平面的距离

(1)定义　个平行平面同时垂直的直线，叫做这两个平行平面的公垂线. 公垂线夹在两个平行平面间的部分，叫做这两个平行平面的公垂线段. 两个平行平面的公垂线段的长度叫做这两个平行平面的距离.

(2)求平行平面距离常用的方法

①直接利用定义求

证(或连或作)某线段为距离，然后通过解三角形计算之.

②把面面平行距离转化为线面平行距离，再转化为线线平行距离，最后转化为点线(面)距离，通过解三角形或体积法求解之.

四、异面直线的距离

(1)定义　条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离.

任何两条确定的异面直线都存在唯一的公垂线段.

【例题解析】

1．下列四个命题中真命题是　　（ B ）

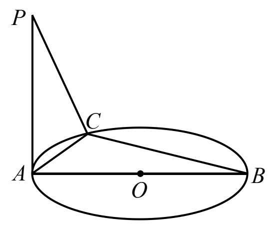
（A）同垂直于一直线的两条直线互相平行；

（B）过空间任一点与两条异面直线都垂直的直线有且只有一条；

（C）底面各边相等、侧面都是矩形的四棱柱是正四棱柱；

（D）过球面上任意两点的大圆有且只有一个。

2.如图, AB 是圆 O 的直径, $PA\perp$ 平面圆 O, C 为圆周上一点,若 $AB=5, AC=2$,则 B 点到平面 PAC 的距离为__________. $\sqrt{21}$



3.空间四边形 $ABCD$ 的各边与两条对角线的长都为 1,点 P 在边 AB 上移动,点 Q 在边 CD 上移动,则点 P,Q 的最短距离为________________. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

提示：联结 AB,CD 的中点，所得线段恰为异面直线 AB,CD 的公垂线

4、在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是边长为 a 的正方形，且 PD＝a，PD⊥面 ABCD

(1) 求：直线 PB 与 PAD 所成角

(2) 求；直线 PD 与 PAB 所成角

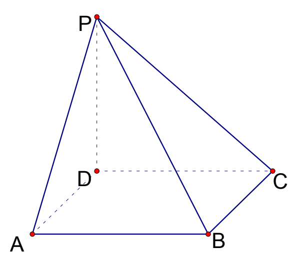
(3) 求：直线 PA 与 PBC 所成角.

解：（1）∵ABCD 是正方形，∴BA⊥AD

∵PD⊥面 ABCD，∴PD⊥AB

∴BA⊥平面 PAD

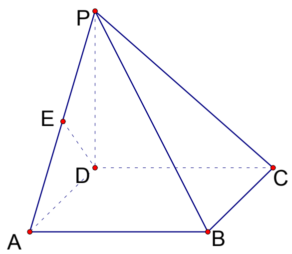
∴PA 是 PB 在平面 PAD 内的射影



∠BPA 是直线 PB 与 PAD 所成角

Rt△PDA 中，PA=$\sqrt{2}a$，AB=a，tan∠BPA=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴∠BPA=arctan$\frac{\sqrt{2}}{2}$

直线 PB 与 PAD 所成角大小为 arctan$\frac{\sqrt{2}}{2}$



（2）取 PA 中点 E，∵PD=AD　∴DE⊥PA

前证 BA⊥平面 PAD，∴ED⊥AB

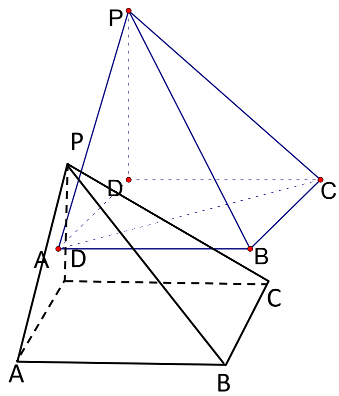
∴ED⊥PAB

∴PE 是 PD 在平面 PAB 内的射影

∠DPE 是直线 PD 与 PAB 所成角

Rt△PDE 中，∠DPE=$\frac{\pi}{4}$

直线 PD 与 PAB 所成角大小为$\frac{\pi}{4}$



（3）设 A 到平面 PBC 的距离为 h,

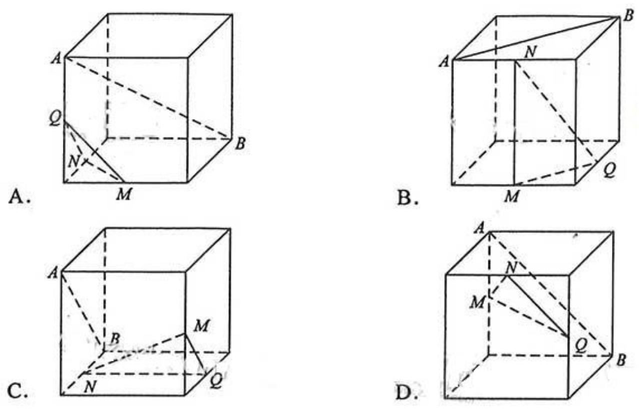
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2$，$S_{\triangle PBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$　由 $V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$

$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

设直线 PA 与 PBC 所成角大小为γ

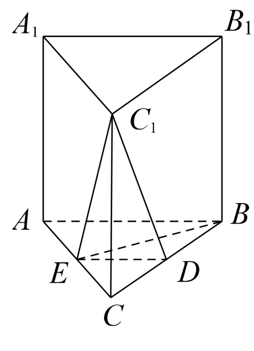
$\sin\gamma=\frac{h}{PA}=\frac{1}{2}$，γ=$\frac{\pi}{6}$　　∴直线 PA 与 PBC 所成角大小为$\frac{\pi}{6}$

5、如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直接 AB 与平面 MNQ 不平行的是



【解析】由正方体的线线关系，易知 B、C、D 中 $AB\parallel MQ$，所以 $AB\parallel$ 平面 MNQ，只有 A 不满足．选 A．

6、如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 BC，AC 的中点，$AB=BC$．



求证：(1) A_1B_1 // 平面 DEC_1；

(2) $BE \perp C_1E$.

【解析】(1)因为 D ，E 分别为 BC ，AC 的中点，所以 ED // AB .

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB // A_1B_1，所以 A_1B_1 // ED .

又因为 $ED \subset$ 平面 DEC_1，$A_1B_1 \not\subset$ 平面 DEC_1，

所以 A_1B_1 // 平面 DEC_1 .

(2)因为 $AB=BC$ ，E 为 AC 的中点，所以 $BE \perp AC$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱，所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC .

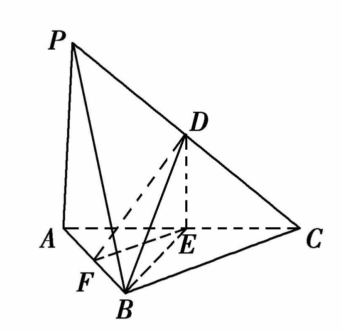
又因为 $BE \subset$ 平面 ABC ，所以 $CC_1 \perp BE$.

因为 $C_1C \subset$ 平面 A_1ACC_1，$AC \subset$ 平面 A_1ACC_1，$C_1C \cap AC = C$ ，

所以 $BE \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

因为 $C_1E \subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BE \perp C_1E$.

7、如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，D ，E，F 分别为棱 PC,AC,AB 的中点．已知 $PA \perp AC$ ，$PA=6,\ BC=8, DF=5.$



求证：(1)直线 PA // 平面 DEF ；(2)平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .

【解析】(1)∵ D , E 分别为 PC , AC 中点　　∴ DE // PA

∵ $PA \not\subset$ 平面 DEF，$DE \subset$ 平面 DEF

∴ PA // 平面 DEF

(2)∵ D , E , F 为 PC , AC , AB 的中点，$PA=6$, $BC=8$

∴ $DE=\frac{1}{2}PA=3$ ，$EF=\frac{1}{2}BC=4$.

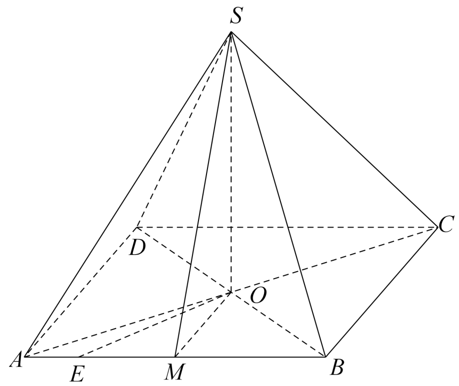
又 $DF=5$ ，$DE^2+EF^2=DF^2$ ，

∴ $\angle DEF=90^\circ$ ，∴ $DE \perp EF$

8、已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点（不含端点），设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1 , SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2 , 二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 ，则

A. $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_3$　B. $\theta_3 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1$　C. $\theta_1 \leqslant \theta_3 \leqslant \theta_2$　D. $\theta_2 \leqslant \theta_3 \leqslant \theta_1$

【解析】由题意知四棱锥$S-ABCD$为正四棱锥，如图，



连接BD，记$AC \cap BD = O$，连接SO，则$SO \perp$平面$ABCD$，取AB的中点M，连接SM，OM，OE，易得$AB \perp SM$，则$\theta_2 = \angle SEO$，$\theta_3 = \angle SMO$，

易知$\theta_3 \geqslant \theta_2$. 因为$OM \parallel BC$，$BC \perp AB$，$SM \perp AB$，所以$\theta_3$也为$OM$与平面$SAB$所成的角，即$BC$与平面$SAB$所成的角，

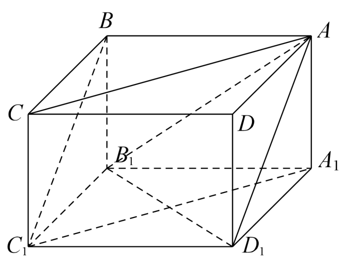
再根据最小角定理知，$\theta_3 \leqslant \theta_1$，所以$\theta_2 \leqslant \theta_3 \leqslant \theta_1$，故选 D.

9、已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC = 120^\circ$，$AB = 2$，

$BC = CC_1 = 1$，则异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】如图所示，把三棱柱补成四棱柱，异面直线AB_1与BC_1所成角为$\angle B_1AD_1$



$$B_1D_1 = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1D_1^2 - 2B_1C_1 \times C_1D_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$AD_1 = \sqrt{2}$，$AB_1 = \sqrt{5}$，

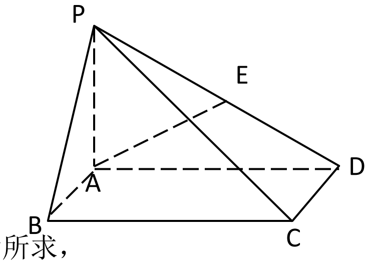
$\therefore \cos\angle B_1AD_1 = \dfrac{AB_1^2 + AD_1^2 - B_1D_1^2}{2\times AB_1 \times AD_1} = \dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$．选 C．

10．如图，在底面是矩形的四棱锥 P—ABCＤ中，PA ⊥平面 ABCＤ，PA=AB=1，BC=2．

（1）求 PC 与平面 PAD 所成角的大小；

（2）若 E 是 PD 的中点，求异面直线 AE 与 PC 所成角的大小；

（3）在 BC 边上是否存在一点 G，使得 D 点到平面 PAG 的距离为$\sqrt{2}$，若存在，求出 BG 的值；若不存在，请说明理由．



解：（1）由已知得 CＤ⊥PA，CＤ⊥AＤ，所以 CＤ⊥PＤ，

所以，PC 与平面 PAD 所成角为∠CPＤ，

又由已知可求得 PＤ=$\sqrt{5}$，CＤ=1，

所以∠CPＤ$=\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；（6 分）

（2）设 CＤ中点为 F，连结 EF，则 EF∥PC，所以 AE 与 EF 所成角为所求，

又 $AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}, EF=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}, AF=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，

$\therefore \cos\angle AEF = \dfrac{AE^2+EF^2-AF^2}{2AE\cdot EF} = -\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

∴异面直线 AE 与 PC 所成角的大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{30}}{10}$；（6 分）

（3）假设 BC 边上存在一点 G 满足题设条件，作 DQ⊥AG，则 DQ⊥平面 PAG，

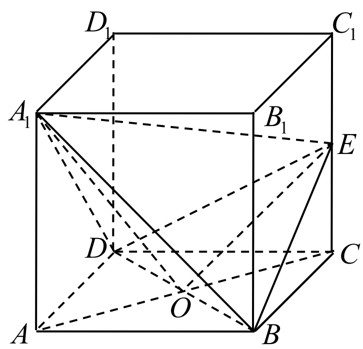
DQ=$\sqrt{2}$，　$\therefore BG = 1 < 2$，故在点G，当BG=1时，使点D到平面PAG的距离为1。

11、棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中$,E,F$分别是棱AA_1和CC_1的中点$,G$是A_1C_1的中点.(1)求直线B_1D_1和平面BFD_1E所成角的大小;(2) G到平面BFD_1E的距离.

(1) $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　提示：若点B_1作BD_1的垂线，垂足即B_1在平面BFD_1E上的射影

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

12、在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, E 是棱CC_1的中点,



(2)求截面A_1BD和截面 EBD 所成的二面角的大小;

(3)求平面A_1BE和底面 ABCD 所成角二面角的大小.

解: (1)连结 AC, 交 BD 于 O, 连结A_1O, EO, A_1E,

则由$A_1O\perp DB, EO\perp DB$,

截面A_1BD和 EBD 所成的二面角的平面角为$\angle A_1OE$,

设正方体棱长为 a, 则

在 RtΔA_1OA中，$A_1O=\sqrt{a^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$,

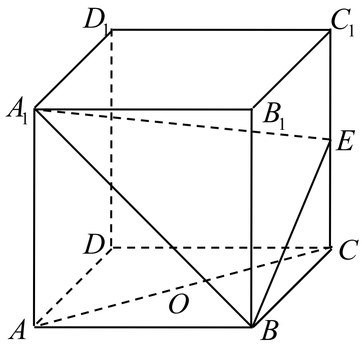
在 RtΔEOC中，$EO=\sqrt{(\dfrac{1}{2}a)^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

在 Rt ΔA_1C_1E 中，$A_1E=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{3}{2}a$,

$\because A_1O^2+EO^2=A_1E^2$,

$\therefore \angle A_1OE=90^\circ$，即截面 A_1BD 和截面 EBD 所成的二面角的大小为直二面角.

(2) 连结 AC, A_1E,



则 ΔA_1B_1E 在底面的射影为 ΔABC,

设正方体的棱长为 2,

则 $A_1B=2\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，$A_1E=3$,

由余弦定理，$\cos\angle BA_1E=\frac{AB_1^2+AE^2-B_1E^2}{2\cdot AB_1\cdot AE}$

$=\frac{8+9-5}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \angle BA_1E=45^\circ$,

$S_{\Delta A_1BE}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sin 45^\circ=3$,

另一方面，$S_{\Delta ABC}=2\Rightarrow\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BE}}=\frac{2}{3}$,

平面 A_1BE 和底面 ABCD 所成角二面角的大小 $\arccos\frac{2}{3}$ 或者 $\pi-\arccos\frac{2}{3}$.

【训练题】

1 、设四面体的六条棱的长分别为 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ 和 a，且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面，则 a 的取值范围是（　　）

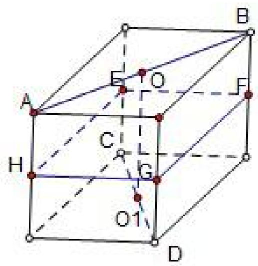
A. $(0,\sqrt{2})$　　B. $(0,\sqrt{3})$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,\sqrt{3})$

【答案】A $BE=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}, BF<BE, AB=2BF<\sqrt{2}$.

2、三棱锥 $A-BCD$，$AB=a, CD=b$，$\angle ABD=\angle BDC$，M，N 分别为 AD, BC 的中点，

P 为 BD 上一点，则 $MP+NP$ 的最小值是__________。$\frac{a+b}{2}$

3、到两互相垂直的异面直线的距离相等的点



（A）只有 1 个　　（B）恰有 3 个

（C）恰有 4 个　　（D）有无穷多个

【答案】 D

放在正方体中研究,显然，线段 OO_1 、EF、FG、GH、HE 的中点到两垂直异面直线 AB、CD 的距离都相等，所以排除 A、B、C，选 D

亦可在四条侧棱上找到四个点到两垂直异面直线 AB、CD 的距离相等

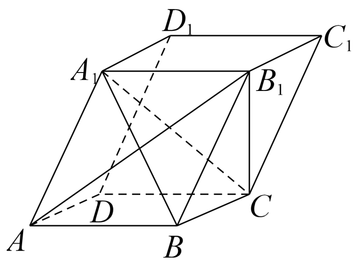
4. 已知动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 BB_1C_1C 中，且满足 $\angle PD_1D=\angle BD_1D$，则动点 P 的轨迹是（　　）的一部分　　　（　　）

A．圆　　　　B．椭圆　　　　C．双曲线　　　　D．抛物线

C 空间中满足 $\angle PD_1D=\angle BD_1D$ 的点的轨迹是以 D_1D 为轴、顶角为 $\angle BD_1D$ 的圆锥，此圆锥与侧面 BB_1C_1C 的交线即为 P 点的轨迹，因为侧面 BB_1C_1C 平行与轴 D_1D，所以动点 P 的轨迹是双曲线的一部分。

【答案】C

5、在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$．求证：(1) $AB\parallel$ 平面 A_1B_1C；(2)平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC．



【证明】(1)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\parallel A_1B_1$

因为 $AB\not\subset$ 平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $AB\parallel$ 平面 A_1B_1C．

(2)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形．

又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

因此 $AB_1\perp A_1B$．

又因为 $AB_1\perp B_1C_1$，$BC\parallel B_1C_1$，

所以 $AB_1\perp BC$．

又因为 $A_1B\cap BC=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC．

因为 $AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC．

6.若正方形 *ABCD* 所在的平面与正方形 *ABEF* 所在的平面成 60° 的角，则一面直线 *AD* 与 *BF* 所成角的余弦值为___________；　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解：连结 CF, CE,

$\because AD \parallel CB$,

$\therefore \angle CBF$ 即为所求异面直线夹角(或其补角);

设 $AB=a$，则 $BC=a, BF=\sqrt{2}a$,

$\because AB \perp CB$ 且 $AB \perp EB$,

$\therefore AB \perp$ 平面 CBE, 且 $\angle CBE$ 是 $D-AB-F$ 的平面角，即 $\angle CBE=60^{\circ}$,

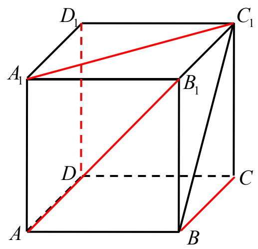
$\because BC=BE=a$,

$\therefore CE=a$,

$\because AB \perp$ 平面 CBE, 且 $EF \parallel AB$,

$\because EF \perp$ 平面 CBE, 得 $EF \perp CE$，且 $CF=\sqrt{2}a$,

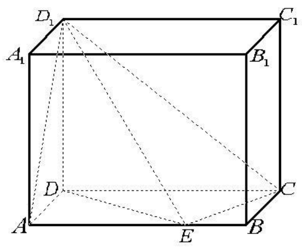
$\therefore \cos\angle CBF=\dfrac{a^2+2a^2-2a^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



7．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，点 E 是 AB 上的动点，

(1)若直线 D_1E与EC垂直，请你确定点 E 的位置，并求出此时异面直线 AD_1 与 EC 所成的角；

(2) 在（1）的条件下求二面角 D_1-EC-D 的大小。



解：（1）由 D_1E与EC垂直 $\Rightarrow$ DE 与 CE 垂直，

设 AE=x，在直角三角形 DEC 中求得 $x=1$，

所以点 E 是 AB 的中点，

取 CD 的中点 Q，则 AQ 平行与 EC，所以 $\angle D_1AQ$ 是所求的角，

求解 ΔD_1AQ 得 $\angle D_1AQ=\dfrac{\pi}{3}$，所以，异面直线 AD_1 与 EC 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$。

（2）由 D_1E与EC垂直 $\Rightarrow$ DE 与 CE 垂直，所以 $\angle D_1EC$ 是所求 D_1-EC-D 的平面角，

求解直角D_1DE得 $tg\angle D_1ED=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以二面角 D_1-EC-D 是 $\operatorname{arc}tg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

8、已知 PC 垂直 $Rt\Delta ABC$ 所在平面，$AC\perp BC$，$CD\perp PB$ 于 D。

（1）求证：$AD\perp PB$；

（2）若 PB 与平面 ABC 成 60° 角，$PC=AC$，求 AD 与平面 ABC 所成角的大小。

解：(1) $\because AC\perp BC, AC\perp PC$，$\therefore AC\perp$ 平面PBC，

$\therefore AC\perp PB$，又 $CD\perp PB$，$\therefore PB\perp$ 平面ACD，所以 $AD\perp PB$。

（2）$\because PC\perp$ 平面ABC，$\therefore \angle PBC$ 是 PB 与平面 ABC 所成角，即 $\angle PBC=60^{\circ}$，

在 ΔPBC 中，过 D 作 $DG \parallel PC$，则$\because PG\perp$ 平面ABC，

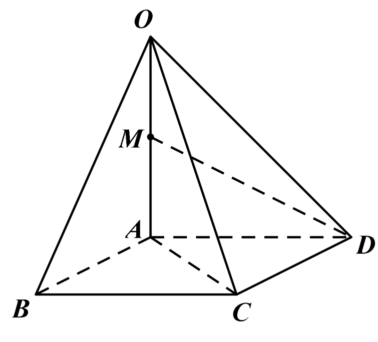
连接 AG，所以 $\angle DAG$ 是 AD 与平面 ABC 所成角，

在 $Rt\Delta DAG$ 中解得 $\angle DAG=\arctan\dfrac{\sqrt{19}}{19}$.

9、如图，已知 $ABCD$ 是底面边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，$OA\perp$ 底面 $ABCD$，$OA=2, M$ 为 OA 的中点.

(1)求异面直线 MD 与 OC 所成角的大小；

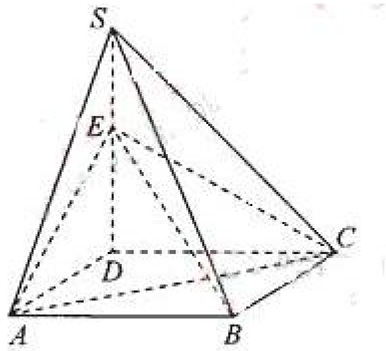
(2)求直线 OB 与平面 OAC 所成角的大小.



解：(1) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$　提示:连结 BD, AC 交于点 E , $ME//OC$

(2) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$　提示: $BD\perp$ 平面 $OAC \Rightarrow \angle BOE$ 为所求角,再解直角三角形 BOE 即可.

10、如图，四棱锥 S＝ABCD 的底面是正方形，SD⊥平面 ABCD,SD＝AD＝a,点 E 是 SD 上的点，且 DE＝λa(0<λ≦1).



（Ⅰ）求证：对任意的 $\lambda\in$（0、1），都有 AC⊥BE:

（Ⅱ）若二面角 C-AE-D 的大小为 60^0C，求 λ 的值。

（Ⅰ）证发 1：连接 BD，由底面是正方形可得 AC⊥BD。

∵SD⊥平面ＡＢＣＤ，∴BD 是 BE 在平面 ABCD 上的射影，

由三垂线定理得 AC⊥BE.

(II)解法 1：∵SD⊥平面 ABCD，ＣＤ⊂平面ＡＢＣＤ，∴　SD⊥CD.

又底面ＡＢＣＤ是正方形，∴　ＣD⊥ＡD，又ＳＤ$\bigcap$AD=D，∴CD⊥平面 SAD。

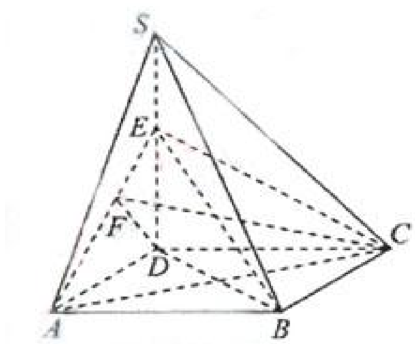
过点 D 在平面 SAD 内做 DF⊥AE 于 F，连接 CF，则 CF⊥AE，

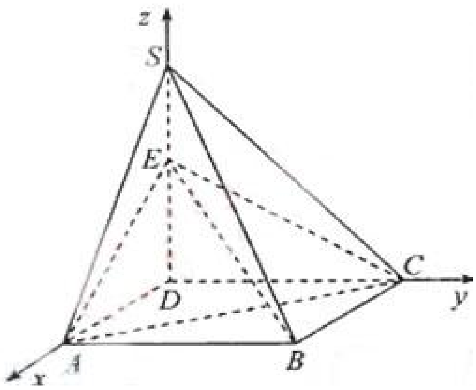
故∠CFD 是二面角 C-AE-D 的平面角，即∠CFD=60°

在 Rt△ADE 中，∵AD=a, DE=λa，AE=$a\sqrt{\lambda^2+1}$。

于是，DF=$\frac{AD\bullet DE}{AE}=\frac{\lambda a}{\sqrt{\lambda^2+1}}$

在 Rt△CDF 中，由 cot60° =$\frac{DF}{CD}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}$





得$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，　即$\sqrt{3\lambda^2+3}$ =3λ

$\lambda \in (0,1]$， 解得 $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

高二数学 第九讲 多面体

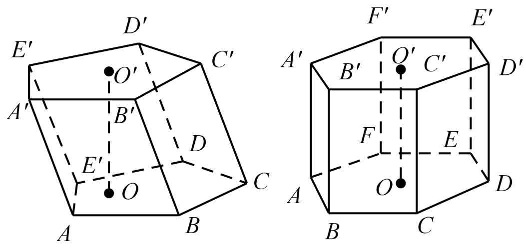
【知识梳理】

一．棱柱

有两个面平行，其余各面都是四边形，且任意相邻的两个四边形的公共边都互相平行的多面体叫做棱柱

棱柱的互相平行的两个面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**，相邻两个侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**，底面多边形的顶点叫做**棱柱的顶点**，不在同一个面上的两个顶点的连线叫做棱柱的对角线．两个底面间的距离叫做**棱柱的高**．

侧棱和底面不垂直的棱柱叫做**斜棱柱**，侧棱和底面垂直的棱柱叫做**直棱柱**，底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**．



斜五棱柱 直五棱柱

图9-1

棱柱的性质：

（1）棱柱的侧面都是平行四边形；

（2）棱柱的底面及平行于底面的截面是全等的多边形．

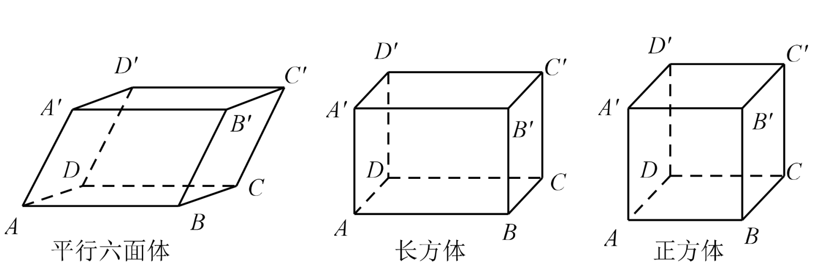
直棱柱的性质：

（1）直棱柱的侧面都是矩形；

（2）直棱柱的侧棱与高相等；

（3）正棱柱的侧面都是全等的矩形．

底面是 n 边形的棱柱叫做 n 棱柱，底面是平行四边形的棱柱叫做**平行六面体**，底面是矩形的直棱柱叫做**长方体**，所有棱长都相等的长方体叫做**正方体**（参见图 9-2）．



平行六面体 长方体 正方体

图9-2

二、棱锥

有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形的多面体叫做**棱锥**．棱锥的多边形面叫做**棱锥的底面**，其余各三角形叫做棱锥的侧面，相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**，各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点，顶点到底面的距离叫做**棱锥的高**

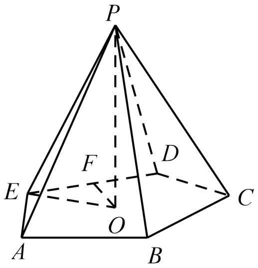


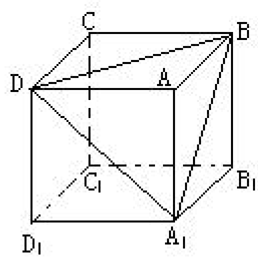
图9-7

底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面中心的棱锥叫做**正棱锥**．

著名数学家欧拉对正多面体进行了研究，发现了多面体的顶点数、面数、棱数间的关系．简单多面体的顶点数 V，面数 F，棱数 E，恒有下面的关系式：$V+F-E=2.$

【例题解析】

1、过正方体的每三个顶点都可以确定一个平面，其中能与这个正方体的 12 条棱所成角都相等的不同平面有几个？



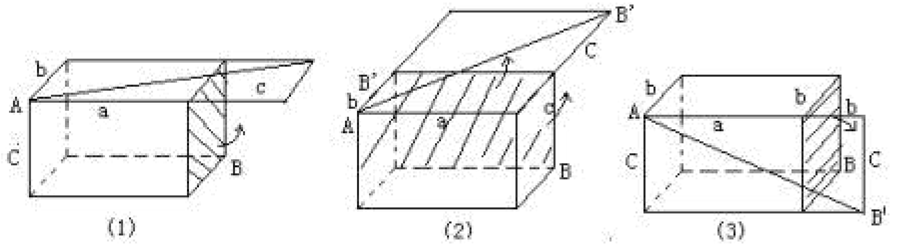
解：（法一）正方体的每个顶点和所在面的面对角线对应一个正三棱锥，如 A 点对应正三棱锥 A-A_1BD。这个正三棱锥的底面 A_1BD 是合条件平面，8 个顶点对应 8 个平面，即满足题设要求的平面有 8 个。

（法二）正方体 8 个顶点，每三点可以确定一个平面，共 C_8^3=56 个，其中 6 个对角面中每三点所确定的平面与每个表面中每三个点所确定的平面均不符合条件，因此合条件的平面的个数是：C_8^3-6• $C_4^3-6\cdot C_4^3$=8（个）

2、长方体一个顶点上三条棱的长分别为 a,b,c（a,b,c 两两不等），一条对角线为 AB，长方体的表面上 A，B 两点间的最短路程为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，则 a,b,c 的大小关系是____________。

解：在长方体表面上从 A 到 B 的最短路途，由于长方体的对称性，可从以下三种实现

方式中比较获得：



（1）AB$'_1$= $\sqrt{b^2+(a+c)^2}$　（2）AB$'_2$= $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$　（3）AB$'_3$= $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$

由已知是短路程为第（2）种情况下获得：

∴ AB$'_1$>AB$'_2$且 AB$'_3$>AB$'_2$，

而 AB$'_1$与 AB$'_3$则大小关系不定，

∴ 可知 a,b,c 的关系为：2ac>2bc 且 2ab>2bc，2bc 与 2ab 不定。

即 a>b 且 a>c，b,c 关系不定。

3、$ABCD-A'B'C'D'$为正方体．任作平面α与对角线AC'垂直，使得α与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为S，周长为l．则（　　）

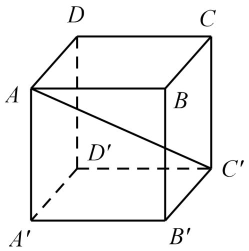


图9-5

A. S为定值，l不为定值　　B. S不为定值，l为定值

C. S与l均为定值　　D. S与l均不为定值

解：将正方体切去两个正三棱锥$A-A'BD$与$C'-D'B'C$后，得到一个以平行平面$A'BD$与$D'B'C$为上、下底面的几何体V，V的每个侧面都是等腰直角三角形，截面多边形W的每一条边分别与V的底面上的一条边平行，将V的侧面沿棱$A'B'$剪开，展平在一张平面上，得到一个平行四边形$A'B'B_1A_1$，而多边形W的周界展开后便成为一条与$A'A_1$平行的线段（如图 9-6 中$E'E_1$），显然$E'E_1=A'A_1$，故l为定值．

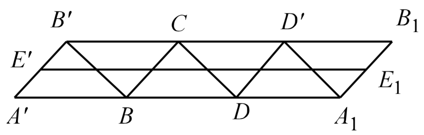


图9-6

4、直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，且$AC=\sqrt{3}AA_1$，则AC与平面A_1BC所成的角θ的取值范围是__________．

解：$0°<\theta<30°$　作$AD\perp A_1B$于D，易证$AD\perp$平面A_1BC，所以$\angle ACD=\theta$．设$AA_1=a$，

$AB=x$，则 $AD=\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{3}a\cdot\sin\theta$，故 $x^2=\dfrac{3a^2\sin^2\theta}{1-3\sin^2\theta}$．易证 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，

故 $\angle CBA=90^\circ$，从而 $AB<AC$，即 $x<\sqrt{3}a$，于是 $0\leqslant\dfrac{3a^2\sin^2\theta}{1-3\sin^2\theta}<3a^2$，$|\sin\theta|<\dfrac{1}{2}$，又 $0^\circ<\theta<90^\circ$，得 $0^\circ<\theta<30^\circ$．

5、正六棱锥的底面周长为 24，侧面与底面所成角为 60°，求：（1）棱锥的高；（2）斜高；（3）侧棱长；（4）侧棱与底面所成角．

解：正六棱锥的底面周长为 24，见图 9-8．

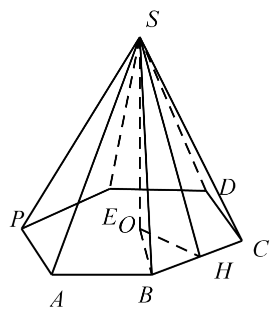


图9−8

$\therefore$ 正六棱锥的底面边长为 4．

在正棱锥 $S-ABCDEF$ 中，

取 BC 中点 H，连 SH，$SH\perp BC$，

O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心．

连 SO，则 $SO\perp$ 底面 $ABCDEF$

$\therefore OH\perp BC$．

$\therefore \angle SHO$ 是侧面与底面所成二面角的平面角，即么 $\angle SHO=60^\circ$．

（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle SOH$ 中，$OH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}$，$\angle SHO=60^\circ$，

$\therefore SO=OH\tan 60^\circ=6$．

（2）同样在 $\triangle SOH$ 中，斜高 $SH=2OH=4\sqrt{3}$，

（3）$\mathrm{Rt}\triangle SOH$ 中，$SO=6$，$OB=BC=4$．

$\therefore SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=2\sqrt{13}$．

（4）$\because SO\perp$ 底面 $ABCDEF$，$\therefore \angle SBO$ 是侧棱与底面所成角，

同样在 $\triangle SOB$ 中，$\tan\angle SBO=\dfrac{SO}{BO}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \angle SBO=\arctan\dfrac{3}{2}$．

6、正四棱锥 $P-ABCD$ 棱长均为 13，M，N 分别是 PA，BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$．

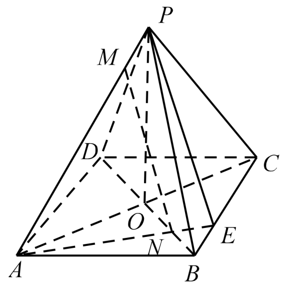


图9-9

（1）求证：直线 MN // 平面 PBC；

（2）求直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦．

分析：（1）要证明 MN // 平面 PBC，只需证明 MN 与平面 PBC 内某一条直线平行．为此连 AN 并延长交 BC 于 E，连 PE．可考虑证明 MN // PE．（2）若能证明 MN // PE，则 $\angle PEO$ 即为直线 MN 与底面所成的角．

解：（1）连 AN 并延长交 BC 于 E，再连 PE．

$\because BE$ // AD，$\therefore EN:AN = BN:ND$，

又 $BN:ND = PM:MA$，

$\therefore EN:AN = PM:MA$，$\therefore PE$ // MN，

又 $PE \subset$ 平面 PBC，$MN \not\subset$ 平面 PBC，$\therefore MN$ // 平面 PBC．

（2）设 O 为底面中心，连 PO，EO，则 $PO \perp$ 上平面 $ABCD$．又 MN // PE，则 $\angle PEO$ 为直线 MN 与平 ABC 所成的角．

由 $BE:AD = BN:ND = 5:8$ 及 $AD = 13$，得 $BE = \dfrac{65}{8}$，在 $\triangle PBE$ 中，$\angle PBE = 60°$，$PB = 13$，$BE = \dfrac{65}{8}$，由余弦定理，得 $PE = \dfrac{91}{8}$．在 $\mathrm{Rt}\triangle POE$ 中，$PO = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$，$PE = \dfrac{91}{8}$，则 $\sin\angle PEO = \dfrac{PO}{PE} = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$．

7、在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB = a$，$PA = 2a$，过 A 作平面分别交平面 PBC 于 DE．当截面 $\triangle ADE$ 的周长最小时，$S_{\triangle ADE} =$__________，P 到截面 ADF 的距离为__________．

解：将三棱锥的侧棱 PA 剪开，当 $\triangle ADE$ 的周长最小时，其展开图如图 9-10．

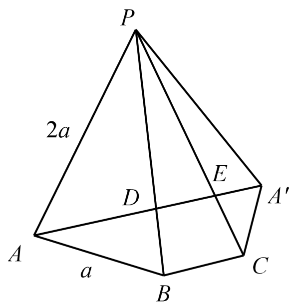


图9-10

$\triangle ADE$ 的周长即是展开图中线段 AA' 的长．易证 $\triangle ABD \backsim \triangle PAB$，

又 $PA = 2AB = 2a$，故 $AD = AB = 2BD = a$，

$PD = PB - BD = \frac{3}{2}a$，$DE = \frac{PD}{PB} \cdot BC = \frac{3}{4}a$．$\triangle ADE$ 中，

DE 上的高 $AH = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{1}{2}DE\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}a$ ．

于是 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AH \times DE = \frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$；

从 P 向底面作高 PO．则

$PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$.

于是 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$.

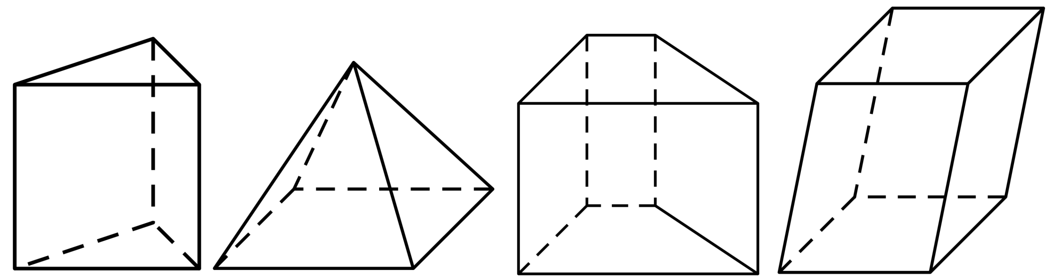
又 $\frac{S_{\triangle PDE}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{PD^2}{PB^2} = \frac{9}{16}$，得 $V_{A-PDE} = \frac{9}{16}V_{A-PBC} = \frac{9}{16} \times \frac{\sqrt{11}}{12}a^3 = \frac{3\sqrt{11}}{64}a^3$.

设 P 到截面的距离为 d，则 $V_{A-PDE} = V_{P-ADE} = \frac{1}{3}d \cdot S_{\triangle ADE} = \frac{3\sqrt{11}}{64}a^3$，于是 $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}a$

【训练题】

1. 请配对下列多面体的名称与图像与并连线:

直四棱柱　　正四棱锥　　平行六面体　　正三棱柱



2. 长方体是____________________.(写出所有正确选项的序号)

①直四棱柱;②平行六面体;③正四棱柱;④正方体;⑤直平行六面体.

3. 判断下列说法是否正确:

(1)有两个相邻的侧面是矩形的棱柱是直棱柱(　　　);

(2)正四棱柱是正方体(　　　);

(3)底面是正多边形的棱锥是正棱锥(　　　).

4. 长方体从同一顶点出发的三条棱长分别为 $3,4,5$，则长方体的对角线长为____________.

5. 已知长方体的一条对角线与其具有相同顶点的三条棱的夹角分别为 α,β,γ，则 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$________________.

6. 四棱柱集合 A，平行六面体集合 B，长方体集合 C，正四棱柱集合 D，正方体集合 E 之间有怎样的包含关系？试用集合文氏图表示出来.

7. 画出一个底面边长$3cm$，高$2cm$的正四棱柱.（**要求：尽可能直观**）

8. 底面是菱形的直棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，它的对角线B_1D和A_1C的长分别是$9cm$和$15cm$，侧棱AA_1的长是$5cm$，求这个直棱柱的底面边长.

9. 已知正四棱锥$V-ABCD$，底面面积为16，一条侧棱长为$2\sqrt{11}$.

(1) 求异面直线VA, DC所成角的大小；

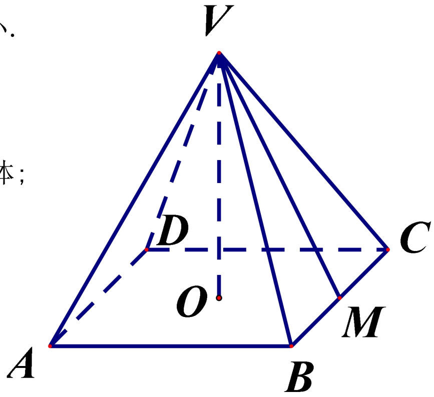
(2) 求侧棱VB及斜高VM分别与底面所成角的大小.

10. “所有边长都相等的三棱锥”被称为**正四面体.**

(1) 你认为这样命名的理由大致是什么？

(2) 设计一个平面图形，使它能够折成一个正四面体；

(3) 计算棱长为 1 的正四面体的高.



答案：

1. 从左到右依次为：

正三棱柱；正四棱锥；直四棱柱；平行六面体

2. ①②⑤

3. (1) 正确；(2) 错误；(3) 错误.

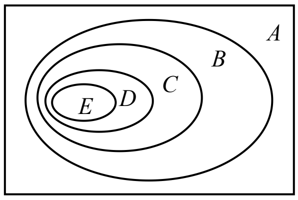
4. $5\sqrt{2}$

5. 2

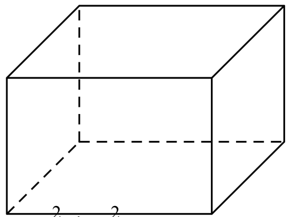
提示：设三棱棱长分别为a,b,c，

则$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{c^2+a^2}{a^2+b^2+c^2}=2$

6. E 苘D　C 苘B　A



7. 如图



8. $8\ (cm)$

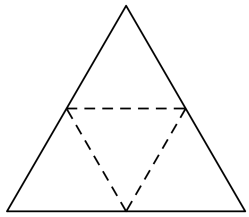
9. (1) $\arccos\dfrac{\sqrt{11}}{11}(\arctan\sqrt{10})$　提示：$\angle VAB$

(2) $\arccos\dfrac{\sqrt{22}}{11}(\arcsin\dfrac{3\sqrt{11}}{11},\arctan\dfrac{3\sqrt{2}}{2}),\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}(\arcsin\dfrac{3\sqrt{10}}{10},\arctan 3)$

提示：$\angle VOB, \angle VMO$

10. (1) 答案不唯一, 它的四个面是全等的等边；

(2) 如右图



(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

高二数学 第十讲 旋转体

【知识梳理】

一．　旋转体

定义：一条平面曲线（包括直线）绕它所在的平面内的一条定直线旋转所形

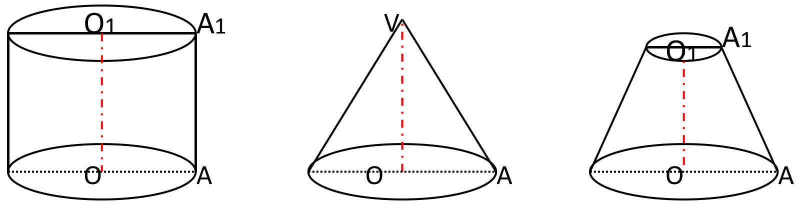
成的曲面叫旋转面。这线叫旋转轴。无论旋转到什麽位置这条曲线叫旋转面的母线。封闭的旋转面围成的几何体叫旋转体。旋转面的轴叫旋转体的轴。

二． 几种常见的旋转体

定义：矩形绕一边旋转一周所围成的几何体叫圆柱。

绕一直角边旋转一周所围成的几何体叫圆锥

圆绕它的直径旋转一周所围成的几何体叫球。



注意：（1）垂直于轴的线段绕轴旋转一周形成圆面。

（2）与轴相交的直线绕轴旋转一周形成圆锥面。

（3）与轴平行的直线绕轴旋转一周形成圆柱面。

圆台（不讲）

2．性质

	圆 柱	圆 锥	圆 台	球
底 面	平行且全等的圆	圆 面	相似的两个圆面	
轴 线	过底面圆心且垂直底面	过顶点和底面圆心垂直于底面	过上下底面圆心且垂直底面	过球心
母 线	平行且相等且垂直于底面	相交于一点	延长线交于一点	大圆(过球心) 小圆(不过球心
轴 截 面	全等的矩形,两边是母线,另两边是两底直径	全等的等腰三角形	全等的等腰梯	大圆
平行于底面的截面	全等的圆与底面相等	相似的圆（比例关系）	圆	球心和截面圆圆心连线垂直截面
侧面展开图	矩形	扇形	扇环	

【例题解析】

1、已知圆柱的底面圆半径是 r，用一个乎行于轴的平面截圆柱，所得的截面面积是轴截面面积的一半，求圆柱的轴到截面的距离．

解: 如图 9-30 所示，设圆柱的高是 h，平行于轴的平面截面是 $A'ACC'$，$AC=a$，截面 $A'ACC'$ 和轴截面 $A'ABB'$ 的面积分别是 $S_{截}$ 和 $S_{轴}$．

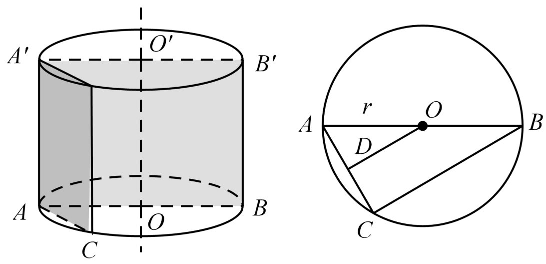


图9-30

$\because S_{截}=ah$， $S_{轴}=2rh$， $S_{截}∶S_{轴}=1∶2$，

$\therefore a=r$.
过底面圆圆心O作AC的垂线，垂足是D，OD是圆柱的轴到截面的距离.

$\because \triangle OAC$是边长是r的正三角形，$\therefore OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$.

2．在等边圆锥（圆锥的轴截面为等边三角形）中，底面半径为R， AB为底面直径，$\angle ABC=60°$,，求异面直线PA，BC的距离.

解：在PA上任取一点M，过M作$ML\perp$底面圆O，垂足为L （如图9-32）.

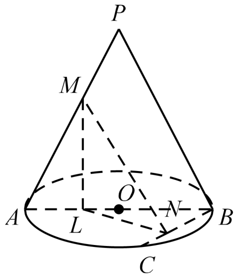


图9-32

$\because$轴截面$PAB\perp$底面圆O，$\therefore L$在直径AB上.
再过L作$LN\perp BC$，垂足为N .
由三垂线逆定理，可知$MN\perp BC$.

设$ML=x$，$\because \angle PAB=60°$，$\therefore AL=ML\cdot\cot 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

$\therefore BL=AB-AL=2R-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$， 又$\angle ABC=60°$，

$\therefore$直角三角形BNL中， $\angle N=BL\cdot\sin 60°=\left(2R-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R-\dfrac{1}{2}x$.

$\therefore$直角三角形MLN中，

$$MN=\sqrt{ML^2+LN^2}=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{3}R-\frac{1}{2}x\right)^2}\geqslant\sqrt{\frac{12}{5}R^2}=\frac{2\sqrt{15}}{5}R\ .$$

当且仅当$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}R$时等号成立． MN的最短距离即异面直线PA，BC之间的距离

故异面直线 PA，BC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}R$．

3、在棱长为 l 的正方体内有两个球相外切且又分别与正方体内切．

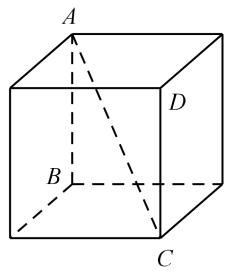


图9-37

（1）求两球半径之和；

（2）球的半径为多少时，两球体积之和最小．

解：（1）如图 9-38，球心 O_1 和 O_2 在 AC 上，过 O_1，O_2 分别作 AD，BC 的垂线交于 E，F．

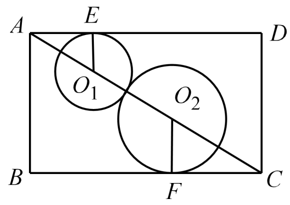


图9-38

则由 $AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，得 $AO_1=\sqrt{3}r$，$CO_2=\sqrt{3}R$．

$\therefore r+R+\sqrt{3}(r+R)=\sqrt{3}$，

$\therefore R+r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$．

（2）设两球体积之和为 V，

则 $V=\frac{4}{3}\pi(R^3+r^3)=\frac{4}{3}\pi(r+R)(R^2-Rr+r^2)$

$=\frac{4}{3}\pi\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[(R+r)^2-3rR\right]$

$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2-3R\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}-R\right)\right]$

$=\frac{4}{3}\pi\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[3R^2-\frac{3(3-\sqrt{3})}{2}R+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$．

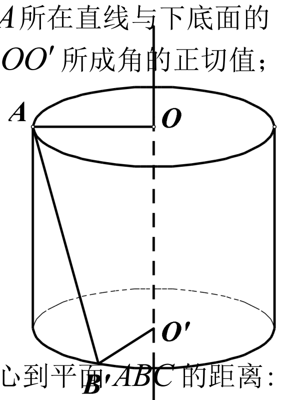
当 $R=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 时，V 有最小值．

$\therefore$ 当 $R=r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ 时，体积之和有最小值．

4、将半径都为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个正四面体的高的最小值为 (*C*)

A． $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$　　*B*．$2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　*C*．$4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　*D*．$\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

5、圆柱的高为 4 厘米，底面半径为 3 厘米，已知上底面一条半径 OA 所在直线与下底面的一条半径 $O'B'$ 所在直线的夹角为 60°，求:⑴直线 AB' 与圆柱的轴 OO' 所成角的正切值；⑵线段 AB' 的长.



答案：1) $\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；⑵ $5cm$ 或 $\sqrt{43}cm$

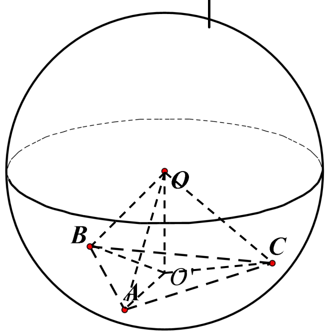
提示:异面直线所成角为 60° 则 A 的位置可能如图有两种情形

6、已知 ΔABC 各顶点均在球 O 的球面上，若球半径为 10，分别求球心到平面 ABC 的距离:

(1) ΔABC 是边长为 3 的正三角形；

(2) ΔABC 是边长分别为 $6,7,8$ 的三角形.

(以上结果均保留 2 位小数)



答案：(1) 9.85

(2) 9.11

提示:因为 $OA=OB=OC \Rightarrow O'A=O'B=O'C$

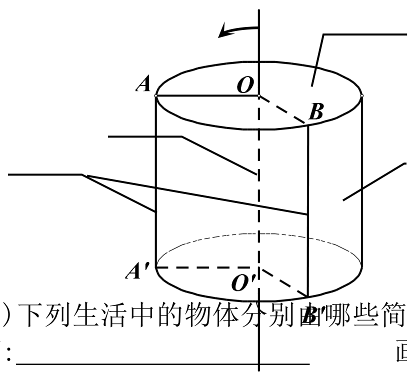
即 O' 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, $\cos A=\dfrac{11}{16}$ (余弦定理)

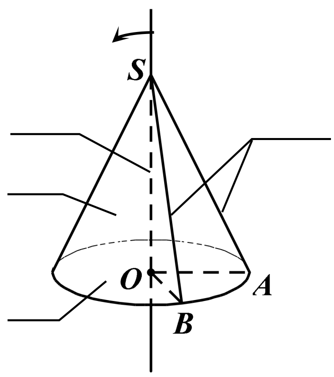
$\Rightarrow \sin A=\dfrac{3\sqrt{15}}{16} \Rightarrow r=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{16}{\sqrt{15}}$ (扩充的正弦定理)

$\Rightarrow |OO'|=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{2}{15}\sqrt{4665}\approx 9.11$

【训练题】

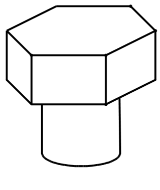
1.请在圆柱和圆锥上写出下列所指部分的名称:（轴、底面、侧面、母线）

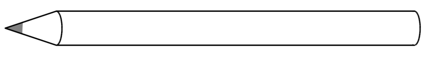




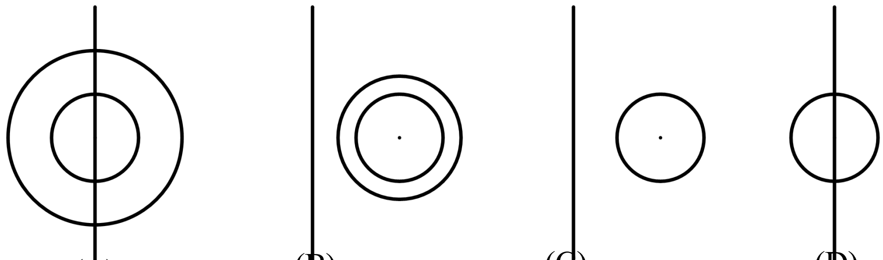
2.(1)下列生活中的物体分别由哪些简

螺钉:____________________ 正 ______________





(2)充满气的车轮内胎(忽略厚度)可由下面图形(　　)绕着对称轴旋转而成.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

3.用一个平面截半径为$25cm$的球，

(1)若截面面积是$49\pi cm^2$,则球心到截面的距离为________；

(2)若球心到截面的距离恰为半径的一半，则截面面积为______________.

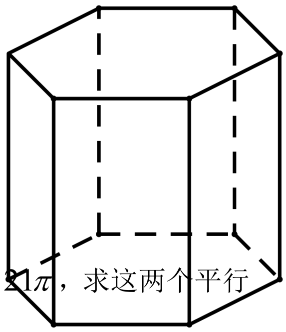
4.把地球视为一个球,如果地球半径增大1米,那么地球赤道的长度会增大多少?

____________________________.(精确到0.01米)

5.已知一个圆柱的轴截面是正方形，且面积为$4cm^2$，求圆柱的母线长和底面面积；

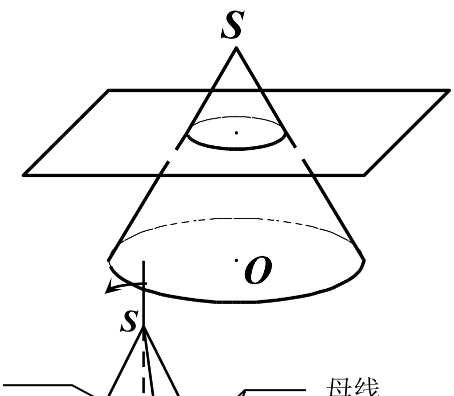
(2)已知一个圆锥的轴截面是边长为$2cm$的正三角形，求圆锥的底面面积及任意母线与底面所成角的大小.

6.正六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的高为$\sqrt{3}$，底面周长为3，求该球的半径长.



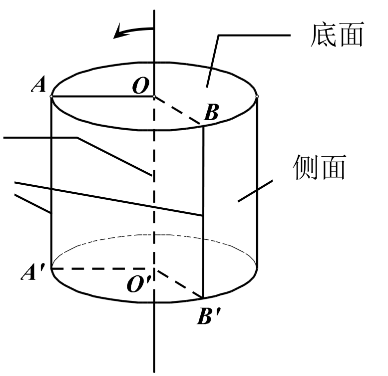
7.已知球O的半径为5，若两平行平面分别截球所得的截面面积为$9\pi,21\pi$，求这两个平行平面间的距离.

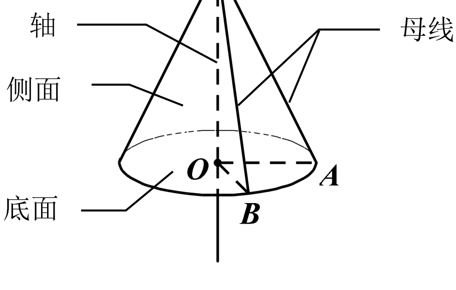
8.用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得的两个旋转体分别为一个小圆锥和一个圆台，若小圆锥的底面半径与原圆锥的底面半径之比为$1:4$，圆台的母线长为$9cm$，求原来的圆锥的母线长.



答案：

1.





2.(1)正六棱柱,圆柱;圆锥,圆柱.(2)C

3.(1) $24cm$;(2) $\frac{1875}{4}\pi cm^2$

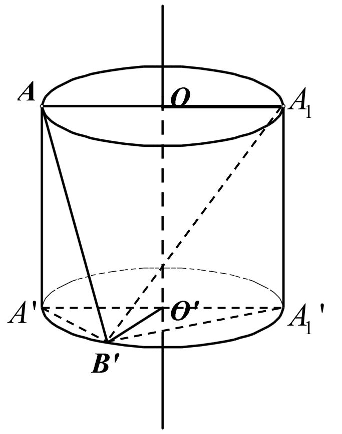
4.6.28米

5.(1)母线 $2cm$,底面积 πcm^2;(2)底面积 πcm^2,母线与底面所成角为 60°

6.1　　提示:球心在最长的对角线的中点

7. 6 或 2　提示:平行平面在球心同侧或异侧

8. $12cm$



高二数学 第十一讲 几何体的表面积和体积

【知识梳理】

一、棱柱和圆柱的侧面积和全面积

直棱柱的侧面积的计算公式，可以直接从它的侧面展开图得到 ：

直棱柱的侧面展开图是矩形．矩形的长和宽分别是直棱柱的底面周长 c 和直棱柱的高 h．

直棱柱的侧面积是 $S_{侧}=ch$．　直棱柱的全面积是 $S_{全}=S_{侧}=2S_{底}$

圆柱的侧面展开图也是矩形．矩形的长和宽分别是圆柱的底面周长 c 和圆柱的高 h，$c=2\pi r$，其中 r 是圆柱底面圆半径．

圆柱的侧面积是 $S_{侧}=ch=2\pi rh$．圆柱的全面积是 $S_{全}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$．

二．棱锥和圆锥的侧面积和全面积

正棱锥的侧面积的计算公式，可以直接从它的侧面展开图得到

正棱锥的侧面展开图是由若干个全等的等腰三角形组成．正棱锥的侧面积是 $S_{侧}=n\times\frac{1}{2}ah'=\frac{1}{2}ch'$．

正棱锥的全面积是 $S_{全}=S_{侧}+S_{底}$．

圆锥的侧面展开图是扇形．扇形的半径是圆锥的母线长 h'，扇形的弧长是圆锥底面圆的周长 c，其中 $c=2\pi r$．

圆锥的侧面积是 $S_{侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times 2\pi rh'=\pi rh'$.

圆锥的全面积是 $S_{全}=S_{侧}+S_{底}=\pi rh'+\pi r^2$.

三、球和它的部分面积

球面被一个平面截得的一部分叫做球冠．此平面截球面所得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的球的直径在截面和球冠之间的一段的长叫做球冠的高．球面可以看作最大的球冠，此球冠的高是 $2R$.

球面被两个平行平面所截，夹在两个平行平面之间的球面的一部分叫做球带．截得的两个圆叫做球带的底，两个平行平面之间的距离叫做球带的高

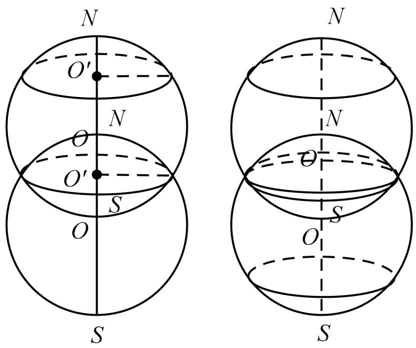


图9-72

球冠面积和球面积的计算公式 $S_{球冠}=2\pi Rh$，$S_{球}=4\pi R^2$.

其中 R 是球的半径，h 是球冠的高.

四、体积

公理 1　长方体的体积等于其长、宽、高的积.

公理 2　（祖暅原理）若夹在两个平行平面内的两个几何体被平行于这两个平面的任何平面所截得的两个截面面积都相等，则这两个几何体的体积相等.

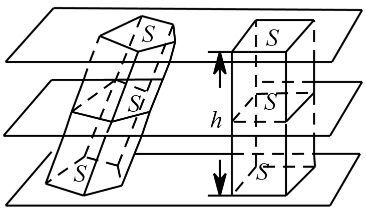


图9-75

（1）已知柱体的底面积是 S，高是 h，体积是 $V=Sh$.

（2）已知圆柱的底面积是 S，高是 h，体积是 $V=Sh$.

（3）三棱锥的底面积是 S，高是 h，体积是 $V=\frac{1}{3}Sh$.

【例题讲解】

1、在正方体上任意选择 4 个顶点，它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点，这些几何形体是_____①__③____④_____⑤______.

(写出所有正确结论的序号)

①矩形；②不是矩形的平行四边形；③有三个面为等腰直角三角形，有一个面为等边三角形的四面体；④每个面都是等边三角形的四面体；⑤每个面都是直角三角形的四面体.

2、以圆柱的下底面为底面，并以圆柱的上底面圆心为顶点作圆锥，则该圆锥与圆柱等底等高．若圆锥的轴截面是一个正三角形，则圆柱的侧面积与圆锥的侧面积之比为________.

解析：设圆锥底面半径为 r，则母线长为 $2r$，高为 $\sqrt{3}r$，

∴圆柱的底面半径为 r，高为 $\sqrt{3}r$，

$$\therefore \frac{S_{圆柱侧}}{S_{圆锥侧}}=\frac{2\pi r\cdot\sqrt{3}r}{\pi r\cdot 2r}=\sqrt{3}.$$

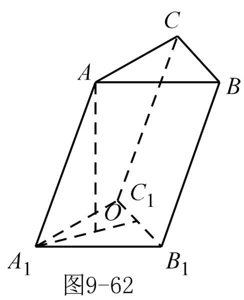


图9-62

答案：$\sqrt{3}$：1

3、斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 5 的正三角形，侧棱长为 4，侧棱 AA_1 和底面两边 A_1B_1、A_1C_1 都成 $60°$ 角，求这个棱柱的侧面积.

解：作 $AO\perp$ 面 $A_1B_1C_1$，O 为垂足.

则 O 点在 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线上，即 A_1O 是 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线.

又$\because$ 三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形，$\therefore A_1O\perp B_1C_1$.

由三垂线定理得 $AA_1\perp B_1C_1$，

又 $BB_1 /\!/ AA_1$，$\therefore BB_1\perp B_1C_1$，$\therefore BB_1C_1C$ 是矩形.

$\therefore S_{侧}=S_{平行四边形ABB_1A_1}+S_{平行四边形A_1ACC_1}+S_{平行四边形BB_1C_1C}$

$=2\times4\times5\times\sin60°+4\times5$

$=20(1+\sqrt{3})$.

4、已知一个圆锥的底面半径为 R，高为 H，在其中有一个高为 x 的内接圆柱，问 x 取何值时，圆柱的侧面积最大?

解：画圆锥及内接圆柱的轴截面，设所求圆柱的底面半径为 r，它的侧面积

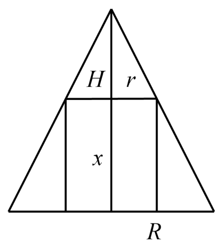


图9-63

$S_{圆柱侧}=2\pi rx$

$\because \dfrac{r}{R}=\dfrac{H-x}{H}$，$\therefore r=R-\dfrac{R}{H}\cdot x$.

$\therefore S_{圆柱侧}=2\pi Rx-\dfrac{2\pi R}{H}\cdot x^2$.

因为 $S_{圆柱侧}$ 的表达式中 x^2 的系数小于零，所以这个函数有最大值.

这时圆柱的高是 $x=-\dfrac{2\pi R}{-2\cdot\dfrac{2\pi R}{H}}=\dfrac{H}{2}\in[0，H]$.

当圆柱的高是已知圆锥的高的一半时，它的侧面积最大.

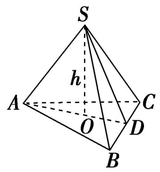
5、有两个相同的直三棱柱，高为 $\dfrac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a,4a,5a(a>0)$.用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是______________.

答案.$0<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 提示:全面积最小的是一个四棱柱意味着对拼的那个面面积最大的是三

个侧面中面积最大的那个,而不是底面,因此$5a\cdot\dfrac{2}{a}>\dfrac{1}{2}\cdot 3a\cdot 4a\Rightarrow 10>6a^2$

6．已知三棱锥的顶点在底面上的射影是底面正三角形的中心，三棱锥的侧棱长为 10 cm，侧面积为 144 cm^2，求棱锥的底面边长和高．

解：



如图所示，三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=10$.

设高 $SO=h$，底面边长为 $AB=a$.

连接 AO 并延长交 BC 于点 D，连接 SD，

$\therefore S_{侧}=\dfrac{1}{2}\times 3a\times SD=144$，即

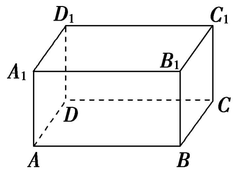
$\dfrac{1}{2}\times 3a\times\sqrt{10^2-(\dfrac{a}{2})^2}=144$.

∴底面边长 $a=12$ cm.∴$SD=8$.

又在 Rt△SOD 中，

$h^2=SD^2-OD^2=8^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a)^2=64-\dfrac{1}{12}\times 12^2=52$.

∴高 $SO=h=2\sqrt{13}$ cm.



7．已知一个圆柱的底面直径与高均为 $2R$，一个圆锥的底面直径与高均为 $2r$，若圆柱的表面积与圆锥的表面积相等，则 R^2∶r^2=________.

解析：圆柱的表面积 $S_1=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$.

圆锥的母线 $l=\sqrt{(2r)^2+r^2}=\sqrt{5}r$.

圆锥的表面积 $S_2=\pi r^2+\dfrac{1}{2}\times 2\pi r\times\sqrt{5}r=(\sqrt{5}+1)\pi r^2$.

由 $S_1=S_2$ 得 $6\pi R^2=(\sqrt{5}+1)\pi r^2$，

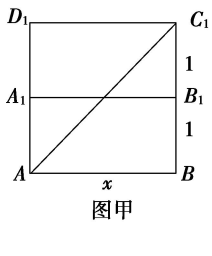
所以 R^2∶$r^2=(\sqrt{5}+1)$∶6.

答案：$(\sqrt{5}+1)$∶6

8. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB>1$，小蚂蚁从点 A 沿长方体的表面爬到点 C_1，所爬的最短路程为 $2\sqrt{2}$.

(1)求 AB 的长度；(2)求该长方体外接球的表面积．

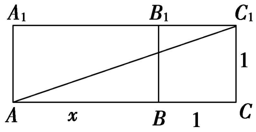
解：(1)设 $AB=x$，点 A 到点 C_1 可能有两种途径，如图甲的最短路程为 $|AC_1|=\sqrt{x^2+4}$.



图甲

如图乙的最短路程为

$|AC_1|=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2}$，



图乙

∵$x>1$，∴$x^2+2x+2>x^2+2+2=x^2+4$，故从点 A 沿长方体的表面爬到点 C_1 的最短距离为$\sqrt{x^2+4}$.

由题意得$\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{2}$，解得 $x=2$.

即 AB 的长度为 2.

(2)设长方体外接球的半径为 R，则

$(2R)^2=1^2+1^2+2^2=6$，

∴$R^2=\frac{3}{2}$，∴$S_{表}=4\pi R^2=6\pi$.

即该长方体外接球的表面积为 6π.

9、三棱锥的底面是等腰三角形，这个三角形的底边长和底边上的高都是 4 cm，侧棱长都是 6.5 cm，求棱锥的体积.

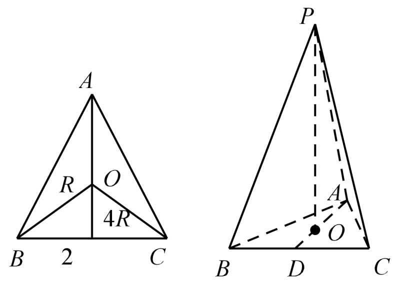


图9−77

解：$S_{底}\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

$\because PA=PB=PC=6.5$，

$\therefore O$ 为$\triangle ABC$ 的外心.

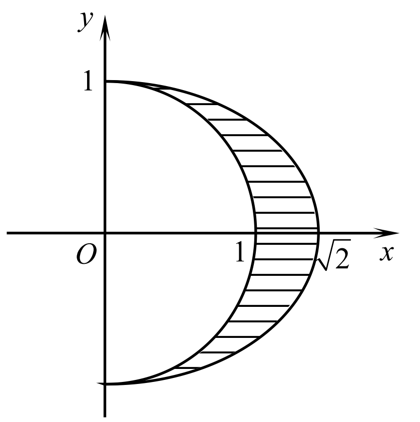
设外接圆半径为 R.

$\because R^2=4+(4-R)^2=R^2-8R+20$，解得 $R=\frac{5}{2}$，

$\therefore h=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{25}{4}}=6$.

$\therefore V=\frac{1}{3}Sh=16\left(\text{cm}^3\right)$.

10、 在 xOy 平面上, 将一段圆弧 $x^2+y^2=1(x\ge 0)$ 和一段椭圆弧 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(x\ge 0)$ 围成的封闭图形记为 D, 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为Ω，过$(0,y)(|y|<1)$ 作Ω的截面, 所得截面面积为$S(y)$，则$S(y)=$______________, 进而利用祖暅原理和一个球, 得出Ω的体积值为_____________.



解: $S(y)=\pi R^2-\pi r^2$,

其中$\frac{R^2}{2}+y^2=1\Leftrightarrow R^2=2(1-y^2)$，$r^2+y^2=1\Leftrightarrow r^2=1-y^2$,

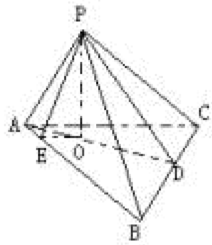
因此$S(y)=\pi R^2-\pi r^2=\pi(1-y^2)$,

它与由$x^2+y^2=1(x\ge 0)$绕 y 轴一周旋转而成的球的过$(0,y)(|y|\le 1)$的截面积相同,

根据祖暅原理, 其体积与半径为 1 的球的体积相同, 即为 $\frac{4\pi}{3}$.

11、如图，三棱锥 P-ABC 中，PA=a, AB=AC=2a, ∠PAB=∠PAC=∠BAC=60°, 求这个三棱锥的体积。

解（法一）（直接用公式）：



作 BC 中点 D，连结 AD，PD；过 P 作 PO⊥平面 ABC 于 O，

∵∠PAB=∠PAC，AB=AC，∴ΔPAB≌ΔPAC，AD⊥BC，

∴ PB=PC， ∴PD⊥BC，∴ BC⊥平面 PAD， ∴平面 ABC⊥平面 PAD，

∴ O 点必在 AD 上，过 O 作 OE⊥AB 于 E，连结 PE，则 PE⊥AB，

在 RtΔPAE 中，∠PAE=60°，PA=a，

∴ PE=$\frac{\sqrt{3}}{2}$a，AE=$\frac{a}{2}$，OE=AE·tan30°，

在 RtΔPOE 中，PO=$\sqrt{PE^2-OE^2}$=$\frac{\sqrt{6}}{3}$a，又易知 $S_{\Delta ABC}$=$\sqrt{3}a^2$，

∴ V_{P-ABC}=$\frac{1}{3}$·$S_{\Delta ABC}$·PO=$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$。

解（法二）（利用等积转换法）：

在ΔPAB 中，PA=a, AB=2a, ∠PAB=60°，

∴ $PB^2=a^2+(2a)^2-2\cdot a\cdot(2a)\cdot\cos60°=3a^2$，

∴ ΔPAB 是直角三角形，PA⊥PB，同理可证 PA⊥PC，又 PB∩PC=P，

∴ PA⊥平面 PBC，

在ΔPBC 中，PB=PC=$\sqrt{3}$a，BC=2a，∴$S_{\Delta PBC}$=$\sqrt{2}a^2$，

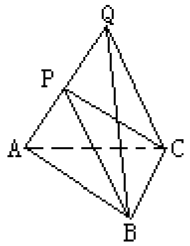
∴ $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$=$\frac{1}{3}$·$S_{\Delta PBC}$·PA=$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$。

解 （法三）（用分割求积法解）：

由法一，BC⊥平面 PAD，

∴ $V_{P-ABC}=V_{B-PAD}+V_{C-PAD}=2\cdot V_{B-PAD}$=$\frac{2}{3}$·$S_{\Delta PAD}$·BD=$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$。

解（法四）（用补形法求解）：



延长 AP 到 Q，使 PQ=a, 连结 QB，QC，可得到一个棱长为 2a 的正四面体，

∴ V_{P-ABC}=$\frac{1}{2}V_{Q-ABC}$=$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}(2a)^3$=$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$。

12、已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 a，过 BC 作截面 DBC 垂直侧棱 PA 于 D，且此截面与底面成 $30°$ 角，求此三棱锥的侧面积.

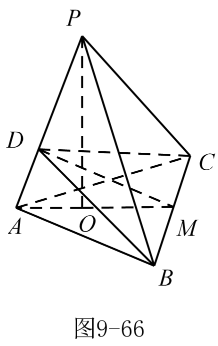


图9-66

解: 作 $PO\perp$ 底面 ABC 于 O.

$\because P-ABC$ 为正三棱锥，$\therefore O$ 为底面正三角形 ABC 的中心.

联结 AO 交 BC 于 M，联结 PM，则 $AM\perp BC$，$PM\perp BC$，

$\therefore BC\perp$ 平面 APM，$\angle DMA$ 即为面 DBC 与底面所成的二面角的

平面角.

$\because$ 截面 DBC 与底面成 $30°$ 的二面角，$\therefore \angle AMD = 30°$，又 $PA \perp$ 平面 DBC，$\therefore PA \perp DM$，$\therefore \angle PAM = 60°$.

$\because$ 正三角形 ABC 边长为 a，$\therefore AO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$MO = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

直角三角形 PAO 中，$PO = AO \cdot \tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \sqrt{3} = a$.

直角三角形 POM 中，$PM = \sqrt{PO^2 + OM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{39}}{6}a$.

$\therefore S_{\text{正棱锥侧}} = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot \dfrac{\sqrt{39}}{6}a = \dfrac{\sqrt{39}}{4}a^2$.

13．设一球的半径为 r，求外切于这球的一切圆锥中全面积最小的圆锥的全面积.

解：圆锥的轴截面为三角形 ABC，圆 O 为三角形 ABC 的内切圆，其半径为 r .

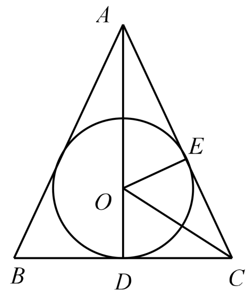


图9−67

设圆锥底面半径为 R，母线长为 l，则

$S_{全} = S_{底} + S_{侧} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R^2\left(1 + \dfrac{l}{R}\right) = \pi R^2\left(1 + \dfrac{1}{\cos C}\right)$.

又三角形 ODC 中有 $R = r \cdot \cot\dfrac{C}{2}$，

$\therefore S_{全} = \pi r^2 \cdot \cot^2\dfrac{C}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\cos C}\right) = \pi r^2 \cdot \dfrac{2}{\tan^2\dfrac{C}{2}\left(1 - \tan^2\dfrac{C}{2}\right)}$

$\geqslant \pi r^2 \dfrac{2}{\frac{1}{4}} = 8\pi r^2$.

当且仅当 $\tan^2\dfrac{C}{2} = 1 - \tan^2\dfrac{C}{2}$，即 $\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

$\therefore$ 当圆锥母线长 l 与底面夹角的一半的正切值等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，圆锥的全面积最小，最小值为 $8\pi r^2$.

【训练题】

1．表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上，则此球的体积为__________.

解：设正八面体的边长为 a，则表面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot 8 = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 1$，球的半径为 $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

2．四面体 $DABC$ 的体积为 $\dfrac{1}{6}$，且满足 $\angle ACB = 45°$，$AD + BC + \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 3$，求 DC 长.

解：由于 $\dfrac{1}{3}AD \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 45°\right) \geqslant V_{DABC} = \dfrac{1}{6}$，

即 $AD \cdot BC \cdot \dfrac{AC}{\sqrt{2}} \geqslant 1$．又 $AD + BC + \dfrac{AC}{\sqrt{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{AD \cdot BC \cdot \dfrac{AC}{\sqrt{2}}} \geqslant 3$，

等号当且仅当 $AD=BC=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=1$ 时成立，这时 $AB=1$，$AD\perp$ 面 ABC，则 $DC=\sqrt{3}$．

3．长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=4$，$AD=3$，求异面直线 A_1D 与 B_1D_1 间的距离．

解：利用空间坐标系的方法求解，异面直线 A_1D 与 B_1D_1 间的距离为 $\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$．

4．在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于（　　）．

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解：B

5 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使 $BD=a$，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为(　　)

A.$\dfrac{a^3}{6}$　　B.$\dfrac{a^3}{12}$　　C.$\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　D.$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

解析：选 D.设正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 E，沿 AC 折起后，依题意得：当 $BD=a$ 时，$BE\perp DE$，∴$DE\perp$ 面 ABC，∴三棱锥 $D-ABC$ 的高为 $DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，∴$V_{D-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

7.

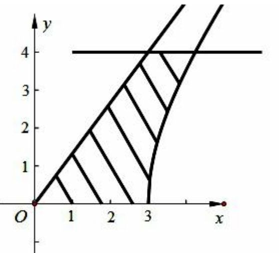
6、在 xOy 平面上，将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\ge 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1(x\ge 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D，如图中阴影部分．记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过 $(0,y)(|y|\le 1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出 Ω 的体积值为__________

解：根据提示，一个半径为 1，高为 2π 的圆柱平放，一个高为 2，底面面积 8π 的长方体，这两个几何体与 Ω 放在一起，根据祖暅原理，每个平行水平面的截面面积都相等，故它们的体积相等，即 Ω 的体积值为 $\pi\cdot 1^2\cdot 2\pi+2\cdot 8\pi=2\pi^2+16\pi$．

7、若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$，则其外接球的表面积是 $\underline{9\pi\qquad}$.

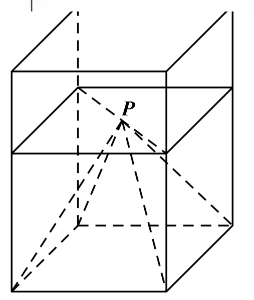
简答：放在正方体中来考虑问题，可以得到：体对角线的一半是球的半径，$R=\dfrac{3}{2}$

8、在 xOy 平面上，将双曲线的一支 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1(x>0)$ 及其渐近线 $y=\dfrac{4}{3}x$ 和直线 $y=0$，$y=4$ 围成的封闭图形记为 D，如图中阴影部分.记 D 绕 y 轴旋转一周所得的几何体为



36π

9、如图,一个正四棱柱形的密闭容器底部镶嵌了同底的正四棱锥形



实心装饰块,容器内盛有a升水时,水面恰好经过正四棱锥的顶点P.如果将容器倒置,水面也恰好经过点P.有下列四个命题:

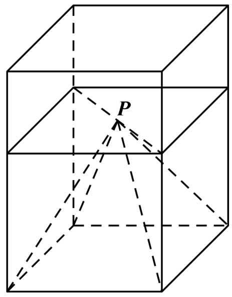
A.正四棱锥的高等与正四棱柱高的一半;

B.将容器侧面水平放置时,水面也恰好过点P;

C.任意摆放该容器,当水面静止时,水面都恰好经过点P;

D.若往容器内再注入a升水,则容器恰好能装满.

其中真命题的代号是<u>　　B、D　　</u>.(写出所有真命题的序号)



设水的体积是：a，四棱锥的体积为 V

所以：2V=a （因为下部分柱体的体积是四棱锥的体积的 3 倍）

上面柱体体积是 2V=a，所以两部分的柱体高比是 2：3

C 答案是不正确的，如果按照四棱锥的某一个侧面为水平面，就不满足

高二数学 第十二讲 球面距离

【知识梳理】

球的性质：

（1）同一个球的半径都相等；

（2）用任意平面截球所得的截面都是圆，球心与球截面圆心的连线与截面垂直；

（3）若用R和r分别表示球的半径和截面圆的半径，用d表示球心到截面网的距离，则

$$d=\sqrt{R^2-r^2};$$

（4）同一个球的大圆互相平分．

在平面上，两点间的距离是联结两点的直线段的长度．在球面上，联结两点的最短路径叫做两点的球面距离．可以证明两点的球面距离是过这两点的球的大圆的劣弧的长度．

1．劣弧上的长度是球面上两点之间的最短路径；

2．我们把它称为球面上两点之间的距离；

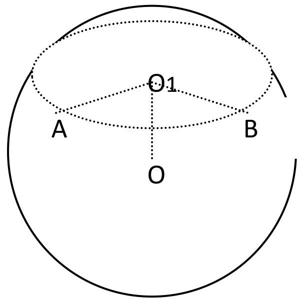
3．球面上连结两点之间的最短路径是经过这两点的一段大圆弧——劣弧。

球面距	
使用情景	求球面距
解题步骤	求线段AB的长度$\rightarrow$解ΔOAB得$\angle AOB$的大小（O是球心）$\rightarrow$利用公式$l_{AB}=r\cdot\alpha$求A,B两点间的球面距。

【例题解析】

1、 如图球 0 的半径为 2，圆O_1是一小圆，$O_1O=\sqrt{2}$，A、B是圆O_1上两点，若

$\angle AO_1B=\dfrac{\pi}{2}$，则 A,B 两点间的球面距离为______________.



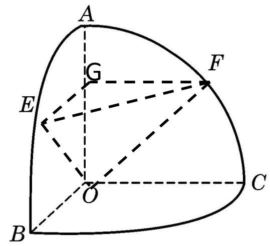
解:由$O_1O=\sqrt{2}$,$OA=OB=2$由勾股定理在圆O_1中

则有$O_1A=O_1B=\sqrt{2}$,又$\angle AO_1B=\dfrac{\pi}{2}$　则$AB=2$ 所以在ΔAO

$OA=OB=AB=2$，则ΔAOB为等边三角形，那么$\angle AOB=6$

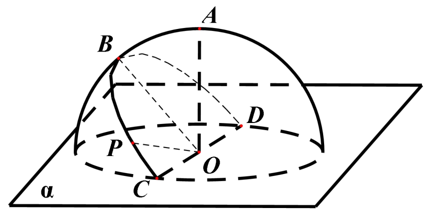
由弧长公式$l=r\theta$(r为半径)得A,B两点间的球面距离$l_{AB}=r\theta=$

【变式演练 2 】如图，O 是半径为 1 的球心，点 A、B、C 在球面上，E、F 分别是大圆弧 AB 与 AC 的中点，则点 E、F 在该球面上的球面



(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

2、如图，半径为R的半球O的底面圆O在平面α内，过点O作平面α的垂线交半球面于点A，过圆O的直径CD作平面α成45°角的平面与半球面相交，所得交线上到平面α的距离最大的点为B，该交线上的一点P满足$\angle BOP=60^\circ$，则A、P两点间的球面距离为（　　）



A、$R\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B、$\dfrac{\pi R}{4}$　　C、$R\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D、$\dfrac{\pi R}{3}$

【解析】根据题意，易知平面 AOB⊥平面 CBD,$\therefore \cos\angle AOP=\cos\angle AOB\cdot\cos\angle BOP$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,$\therefore \angle AOP=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，由弧长公式易得，$A$、$P$两点间的球面距离为

$R\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3．已知地球的半径为R，球面上A，B两点都在北纬45°圈上，它们的球面距离为$\dfrac{\pi}{3}R$，A点在东经30°上，求B点的位置及A，B两点所在其纬线圈上所对应的劣弧的长度．

解：如图 9-36，设球心为O，北纬45°圈的中心为O_1，

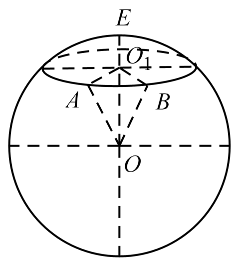


图9-36

由 A，B 两点的球面距离为 $\frac{\pi}{3}R$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\triangle OAB$ 为等边三角形．于是 $AB=R$．

由 $O_1A=O_1B=R\cdot\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，

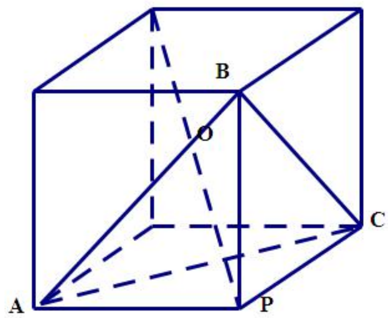
$\therefore O_1A^2+O_1B^2=AB^2$．即 $\angle AO_1B=\frac{\pi}{2}$．

又 A 点在东经 30° 上，故 B 的位置在东经 120°，北纬 45° 或者西经 60°，北纬 45°．

$\therefore$ A，B 两点在其纬线圈上所对应的劣弧 $O_1A\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$．

4、已知正三棱锥 $P-ABC$, 点 P, A, B, C 都在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上, 若 PA, PB, PC 两两互相垂直, 则球心到截面 ABC 的距离为________.

解: 因为在正三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两互相垂直, 所以可以把该正三棱锥看作为一个正方体的一部分, (如图所示), 此正方体内接于球, 正方体的体对角线为球的直径, 球心为正方体对角线的中点.

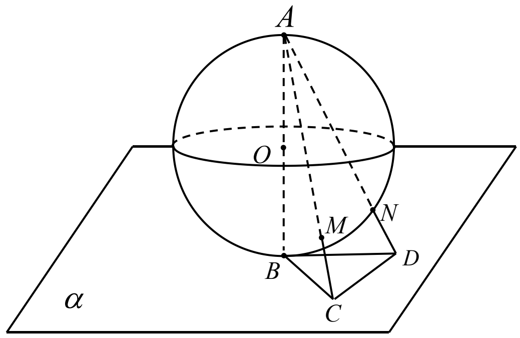


球心到截面 ABC 的距离为球的半径减去正三棱锥 $P-ABC$ 在面 ABC 上的

高. 已知球的半径为 $\sqrt{3}$, 所以正方体的棱长为 2, 可求得正三棱锥 $P-ABC$ 在面 ABC 上的高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以球心到截面 ABC 的距离为

$$\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. 半径为1的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α，垂足为 B， $\triangle BCD$ 是平面 α 内边长为1的正三角形，线段 AC、AD 分别与球面交于点 M, N, 求 M、N 两点间的球面距离.
(保留到小数点后两位)



解：0.82

提示: 连结 BM, MN, OM, ON

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$

$BM\perp AC\Rightarrow$

$\frac{AM}{AB}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AM=\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{CD}\Rightarrow MN=\frac{4}{5}\Rightarrow$

$\angle MON=\arccos\frac{17}{25}\Rightarrow$

$\overset{\frown}{MN}=1\cdot\arccos\frac{17}{25}\approx 0.82$

6. 已知球O的半径为 1，A、B、C三点都在球面上，A、B两点和A、C两

点的球面距离都是$\frac{\pi}{4}$，B、C两点的球面距离是$\frac{\pi}{3}$，则二面角B—OA—C的的大小是（　　）

A $\frac{\pi}{4}$　　B $\frac{\pi}{3}$　　C $\frac{\pi}{2}$　　D $\frac{2\pi}{3}$

解：C 由于球的半径为 1，A、B两点间的球面距离为$\frac{\pi}{4}$，则∠AOB=$\frac{\pi}{4}$，同理，∠AOC=$\frac{\pi}{4}$，∠BOC=$\frac{\pi}{3}$，则有ΔOBC为正三角形，ΔOAC≌ΔAOB，

做CD⊥AO于D，则BD⊥AO，∠CDB即为二面角C—AO—B的平面角，

在ΔAOB中，BD·AO=AO·BO·sin$\frac{\pi}{4}$；

则BD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$；同理CD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，又BC=1，在ΔBCD中，cos∠CDB=$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{2\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}}$=0；

则∠CDB=$\frac{\pi}{2}$ ；即为所求。

【训练题】

1.下列说法正确的是(　　　) D

A.经过球面上两点有且仅有一个大圆；　　B.经过球面上两点有无数个大圆；

C.经过球面上两点有且仅有一个小圆；　　D.经过球面上两点可能没有小圆.

2、长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的 8 个顶点在同一个球面上，且$AB=2,AD=\sqrt{3},AA_1=1$，如图所示，则顶点A,B间的球面距离是(　C　　)

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

提示：可以得到：$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$

3、设地球半径为 R，地球上 A、B 两点都在北纬 45º 的纬线上，A、B 两点的球面距离是$\frac{\pi}{3}$R，A 在东经 20º，求 B 点的位置。

分析：α_1=20º，$\beta_1=\beta_2$=45º，由公式（II）得：

$\frac{\pi}{3}$R= R·arcos[cos²45ºcos（20º－α_2）+sin²45º]

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ cos（20º－α$_2$）$+\dfrac{1}{2}$

∴cos（20º－α$_2$）=0, 20º－α$_2$=±90º 即：α$_2$=110º 或 α$_2$=-70º

所以 B 点在北纬 45º，东经 110º或西经 70º

4、（2002 年第六届北京高中数学知识应用竞赛试题）北京时间 2002 年 9 月 27 日 14 点，国航 CA981 航班从首都国际机场准时起飞，当地时间 9 月 27 日 15 点 30 分，该航班正点平稳降落在纽约肯尼迪机场；北京时间 10 月 1 日 19 点 14 分，CA982 航班在经过 13 个小时的飞行后，准点降落在北京首都国际机场，至此国航北京--纽约直飞首航成功完成。这是中国承运人第一次经极地经营北京--纽约直飞航线。从北京至纽约原来的航线飞经上海（北纬 31 ，东经 122 ）东京（北纬 36 ，东经 140 ）和旧金山（北纬 37 ，西经 123 ）等处，如果飞机飞行的高度为 10 千米，并假设地球是半径为 6371 千米的球体，试分析计算新航线的空中航程较原航线缩短了多少。

解：本题应计算以北京、纽约为端点的大圆劣弧长，再计算北京到上海、上海到东京、东京到旧金山、旧金山到纽约各段大圆劣弧长度和，然后求

高二数学 第 13 讲 排列组合

【知识梳理】

1、排列，排列数：

从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数。用符号 P_m^n 表示。

2、排列数公式：

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}(m,n\in N^*,m\le n)$$

3、组合，组合数:

从 n 个不同元素中取出 m(m≤n)个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符合 C_n^m 表示.

组合数公式为 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}(m,n\in N^*,m\le n)$，

规定 $C_n^0=C_n^n=1$.

组合数的性质

性质一、$C_n^m=C_n^{n-m}$

性质二、$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

4、解决排列组合问题常见的解题方法有：

直接法，间接法，捆绑法，插空法，元素优先法等。

【例题解析】

1、制作某工件需要三道工序，第一道有 5 人会做，第二道有 6 人会做，第三道有 7 人会做，现要制作这个工件，有多少种不同的选法？

答案：$5\times6\times7=210$ 种.

2、3 名同学分别从英语和日语中选学一门外语课程，则不同的选法有多少种？

答案：$2\times 2\times 2=8$ 种.

3、有 10 本不同的书，三个人去借，每人借一本，有多少种不同的借法？

答案：$10\times 9\times 8=720.$

4、4 封不同的信投入 3 个不同的箱子，若每个箱子至少投一封信，共有多少种不同的投法？

答案：36.

5、用 0、1、2、3、4、5 这六个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

答案：$5\times 5\times 4=100.$

6、540 的不同正约数共有多少个？

答案：一件事：540 的正约数 $2^a\times 3^b\times 5^c$，步骤 1：取一个整数 $a\in\{0,1,2\}$；步骤 2：取一个整数 $b\in\{0,1,2,3\}$；步骤 3：取一个整数 $c\in\{0,1\}$，$N=3\times 4\times 2=24,$ 则共有 24 个不同的正约数.

7.用数字 0、1、2、3、4 组成没有重复数字的五位数，则其中数字 1、2 相邻的偶数有多少个？

答案：$2P_3^3+P_2^1P_2^2+P_2^1P_2^2P_2^2=24.$

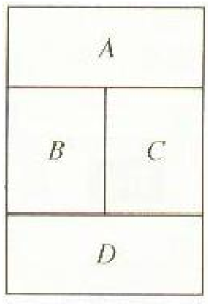
8、从 1 到 200 的自然数中，各个数位上都不含有数字 7 的数有多少个？

答案：$8+P_8^1P_9^1+P_9^1P_9^1+1=162.$

9、若直线方程 $ax+by=0$ 的系数 a、b 可以从 0、1、2、3、5、8 这六个数中取不同的值，则这些方程所表示的不同直线有多少条？

答案：$P_5^2+2=22.$

10、如图，用 5 种不同的颜色给图中的 A、B、C、D 四个矩形区域中涂色，如果每个区域只能图一种颜色，相邻区域颜色不同，共有多少种不同的涂色方法？



答案：$5\times4\times3\times3=180$.

11、用红、黄、蓝三种颜色分别去涂图中标号为 1,2,3,...9 的个 9 小正方形（如右图），需满足任意相邻（有公共边的）小正方形涂颜色都不相同，且标号“1、5、9”的小正方形涂相同的颜色，则符合条件的所有涂法共有____________种.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

答案：$3\times2\times3\times2\times3=108$. 该题目首先要去涂 1，5，9，然后给 2 涂色，之后涂 6，3 有三种情况，再涂 4,8,7 就跟之前是一样的.

12、乘积 $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项？

答案：$4\times3\times5=60$.

13、七名班委进行分工，每人一职，甲乙两人不宜当班长，丙丁不宜任文娱委员，则分工方案有多少种？

答案：$P_2^1P_5^1P_5^5+P_3^1P_4^1P_5^5=2640$.

14、从 1 到 9 这 9 个正整数中任取两个不同的数，分别作为一个对数的真数和底数，一共可以得到多少个不同的对数值？

答案：$P_8^2+1-4=53$.

15、用数字 $2,3$ 组成四位数，且数字 $2,3$ 至少都出现一次，这样的四位数共有多少个（用数字作答）？

答案：排除法 $2\times2\times2\times2-2=14$.

16、由数字$1,2,3,4,$

(1) 可组成多少个 3 位数；

(2) 可组成多少个没有重复数字的 3 位数；

答案：$(1) 4\times4\times4=64;$　　$(2) 4\times3\times2=24;$

17、某植物研究所共有 14 名科研人员，其中 6 名是女性. 现要选出男、女科研人员各一名去支援西部开发建设，有多少种选法？

答案：$8\times6=48$ 种

18、在一块并排的 10 垄田地中，选择两垄分别种植 A 、B 两种作物，每种种植一垄，为有利于作物生长，要求 A 、B 两种作物的间隔不少于 6 垄，不同的选法共有多少种？

答案：依题意，A、B 两种作物的间隔至少 6 垄，至多 8 垄.

当间隔 6 垄时，有 3×P_2^2 种；　当间隔 7 垄时，有 2×P_2^2 种;

当间隔 8 垄时，有 P_2^2 种.

根据分类计数原理共有 3 P_2^2 +2 P_2^2 + P_2^2 =12 种种植方法.

19、写出从 a 、b 、c 、d 四个元素中任意取出两个元素的所有排列.

答案：$ab,ac,ad,ba,bc,bd,ca,cb,cd,da,db,dc.$

20、若 $2<\dfrac{P_{m+1}^{m+1}}{P_{m-1}^{m-1}}\le 42(m\in N^*)$, 则 $m=$ ______.

答案：2，3，4，5，6.

21、记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，2 位老人相邻但不排在两端，不同的排法共有多少种？

答案：$P_4^1P_2^2P_5^5=960.$

22、有 5 个座位连成一排，安排 2 人就座，有且只有两个空位相邻的不同坐法有多少种？

答案：$P_3^2P_2^2=12.$

23、某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段，传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火

炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生，则不同的传递方案共有多少种？

答案：$P_2^1 P_2^1 P_4^4 = 96.$

24、经过三棱锥的各顶点可以连结多少条线段？多少条有向线段？

答案：$C_4^2 = 6;\quad P_4^2 = 12$.

25、从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会，若这 4 人中必须既有男生又有女生，那么有多少种不同的方法？

答案：$C_7^4 - C_4^4 = 34.$

26、某校开设 9 门课程供学生选修，其中 A、B、C 三门由于上课时间相同，至多选一门，学校规定每位同学选修 4 门，共有多少种不同的选修方案.

答案：$C_6^4 + C_3^1 C_6^3 = 75.$

27、某校有 6 间不同的电脑室，每天晚上至少开放 2 间，欲求不同方案的种数，四位同学分别给出下列四个答案：①C_6^2;②$C_6^3 + 2C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$;③$2^6 - 7$;④$P_6^2$.其中正确的答案是

(A) 仅有①　　　(B) 仅有②　　　(C) ②和③　　　(D) 仅有③

答案：C.

答案：$C_6^2 P_2^2 + C_6^3 = 50.$

28、从 4 件不同的美术作品中，选出三件分别送至三个展馆中陈列展出一件，如果有一件作品必须送展，则不同的送展方法有多少种？

答案：$C_3^2 \cdot P_3^3 = 18$ 种.

29、特奥会期间，某高中有 14 名志愿者参加接待工作. 若每天排早、中、晚三班，每班 4 人，每人每天最多值一班，则开幕式当天不同的排班种数为多少种？

答案：$C_{14}^4 C_{10}^4 C_6^4 = 3153150.$

30、从一副扑克牌（52 张）种任取 4 张，恰有两种花色各两张的不同取法有多少种？

答案：$C_4^2 C_{13}^2 C_{13}^2 = 36504.$

31、2 位老师与 6 位同学排成一排拍照，求：

(1) 共有多少种不同的排法；(2) 2 位老师必须相邻，共有多少种排法；

(3) 2 位老师必须隔开，共有多少种不同的排法.

答案：$(1) P_8^8 = 40320;\quad (2) P_7^7 \cdot P_2^2 = 10080;\quad (3) N = P_8^8 - P_7^7 P_2^2 = 30240.$

答案：A

32、已知集合 $A=\{2\},B=\{1,3\},C=\{0,-1,4\}$，从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标，则满足条件的不同点的个数为多少个？

答案：$P_1^1P_2^1P_3^1P_3^3=36.$

33、某工程队有 6 项工程需要单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后才能进行，工程丁必须在工程丙完成后才能进行.那么安排这 6 项工程的不同排法种数是多少种？

答案：$P_6^2=30.$

34、同室四人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺卡，则四张贺卡的不同分配方式有多少种？

答案：$P_3^1P_3^1=9.$

35、在平面直角坐标系中，从六个点：$A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$、$F(3,3)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的个数是多少个？

答案：$C_6^3-C_4^3-C_3^3=15.$

36、顺次连结正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点，所得三角形恰为直角三角形的个数为多少个？

答案：$4\times12=48.$

37、某书店有 11 种杂志，2 元 1 本的 8 种，1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志（每种至多买一本，10 元钱刚好用完），则不同买法的种数是多少种？

答案：$C_8^5+C_8^4C_3^2=266.$

38、某校要求每位学生从 7 门选修课程中选修 4 门，其中甲乙两门课程不能都选，则不同的选课方案有__________种.（以数字作答）

答案：25.

39、甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生进行某种劳动技术比赛，决出了第一名到第五名的名次，甲乙两名参赛者去询问成绩，回答者对甲说：“很遗憾，你和乙都未拿到冠军.”对乙说：“你当然不会是最差的.”从这个回答分析，五人的名次排列共可能有多少种不同的情况.

答案：$P_3^1P_3^1P_3^3=54.$

【训练题】

1、5 位旅客可以在 3 个旅馆任意选择 1 个住宿，共有多少种不同的住宿方法？

答案：$3\times3\times3\times3\times3=243.$

2、某外商计划在四个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该外商不同的投资方案有多少种？

答案：$P_4^3+4\times3\times3=60.$

3、从$1,2,\cdots,10$这 10 个自然数中，每次取出不同两个，使它们的乘积是 6 的倍数，这不同的取法有多少种？

答案：$9+2\times4=17.$

4、某通讯公司推出一组手机卡号码，卡号的前七位数字固定，从“$\times\times\times\times\times\times\times0000$”到“$\times\times\times\times\times\times\times9999$”共有 10000 个号码.公司规定：凡卡号的后四位带有数字“4”或“7”的一律作为“优惠卡”，则这组号码中“优惠卡”的个数为多少个？

答案：$10^4-8^4=5904.$

5、某校安排 5 个班到 4 个工厂进行社会实践，每个班去一个工厂，每个工厂至少安排一个班，不同的安排方法共有多少种？

答案：$C_5^2P_4^4=240.$

6、从正方体的六个面中任取三个面，有且只有两个面相邻的取法有多少种？

答案：$C_3^1C_4^1=12.$

7、8 名学生和 2 位教师站成一排合影，2 位教师不相邻的排法种数为……（　　）

A、$P_8^8\cdot P_9^2$　　B、$P_8^8\cdot C_9^2$　　C、$P_8^8\cdot P_7^2$　　D、$P_8^8\cdot C_7^2$

8、由 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字可以组成没有重复数字且不能被 5 整除的四位数的个数是多少个？

答案：$P_8^1P_8^1P_8^2=3584$(个).

9、现有甲、乙、丙三个盒子，其中每个盒子中都装有标号分别为 1、2、3、4、5、6 的六张

卡片，现从甲、乙、丙三个盒子中依次各取一张卡片使得卡片上的标号恰好成等差数列的取法为多少种？

答案：18.

高二数学 第14讲 二项式定理

【知识梳理】

1．二项式定理：

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^nb+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in N^*)$，

2．二项展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$，二项式系数：C_n^r．项的系数：二项式系数与数字系数的积

3．二项式系数的性质：

（1）对称性．与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等（$\because C_n^m=C_n^{n-m}$）.

（2）增减性与最大值：

若n为偶数，中间一项（第$\dfrac{n}{2}$＋1项）的二项式系数最大；若n为奇数，中间两项（第$\dfrac{n+1}{2}$和$\dfrac{n+1}{2}$＋1项）的二项式系数最大.

4.各二项式系数和：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$;

5． 二项展开式的系数$a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$的性质及赋值法.

【例题解析】

1．若$(ax-1)^5$的展开式中x^3的系数是80，则实数a的值是 （ A ）

A． 2　　B.－2　　C. $\sqrt[3]{4}$　　D. $2\sqrt{2}$

2．$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5$的值为（ B ）

A．61　　B．62　　C．63　　D．64

3．若$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^n$展开式中含$\dfrac{1}{x^2}$项的系数与含$\dfrac{1}{x^4}$项的系数之比为5，则$n$等于(B)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

4、在$(1+x)^5+(1+x)^6+(1+x)^7$的展开式中，x^4的系数是通项公式为$a_n=3n-5$的数列

的____________。

解：由x^4的系数是：$C_5^4+C_6^4+C_7^4=C_5^1+C_6^2+C_7^3=5+15+35=55$，

则由$a_n=55\Rightarrow 3n-5=55\Rightarrow n=20$ 。

5. 已知$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^n$展开式中偶数项二项式系数和比$\left(a+b\right)^{2n}$展开式中奇数项二项式系数和小$120$，求：$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^n$展开式中第3项的系数;

解：由题意得$2^{n-1}+120=2^{2n-1}$　　即$\left(2^n-16\right)\left(2^n+15\right)=0$　　$\therefore 2^n-16=0$，$n=4$

（1）$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^4$展开式的第三项的系数为$C_4^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$

（2）$\left(a+b\right)^8$展开的中间项为$T_5=C_8^4a^4b^4=70a^4b^4$

6. 在二项式$(\frac{1}{2}+2x)^n$的展开式中，若第5项，第6项与第7项的二项式系数成等差数列，求展开式中二项式系数最大的项;

解：（Ⅰ）$C_n^4+C_n^6=2C_n^5$　　∴n=7或n=14，

当n＝7时，展开式中二项式系数最大的项是T_4和T_5

且$T_4=C_7^3(\frac{1}{2})^4(2x)^3=\frac{35}{2}x^3$，$T_5=C_7^4(\frac{1}{2})^3(2x)^4=70x^4$

7．在$(1+x)^3+(1+\sqrt{x})^2+(1+\sqrt[3]{x})$的展开式中，$x$的系数为____7_____(用数字作答).

8、已知$(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}})^n$展开式中偶数项的二项式系数之和为256，求$x$的系数及其二项式系数.

解：由二项式系数的性质：二项展开式中偶数项的二项式系数之和为2^{n-1}，得n=9，由

通项$T_{r+1}=C_9^r\bullet(\sqrt{x})^{9-r}\bullet(-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}})^r=C_9^r\bullet(-2)^r\bullet x^{\frac{9-r}{2}-\frac{2}{3}r}$，

令$\frac{9-r}{2}-\frac{2}{3}r=1$，得$r$=3，所以$x$的二项式系数为$C_9^3$=84，而$x$的系数为

$C_9^3\bullet(-2)^3=84\times(-8)=-672$.

9、设$a_n\left(n=2,3,4,\cdots\right)$是$\left(3-\sqrt{x}\right)^n$的展开式中$x$的一次项的系数，则$\dfrac{3^2}{a_2}+\dfrac{3^3}{a_3}+\cdots+\dfrac{3^{18}}{a_{18}}$的

值为__________。

解：由通项$T_{r+1}=C_n^r 3^{n-r}\left(-1\right)^r x^{\frac{r}{2}}$知，展开式中$x$的一次项的系数为$a_n=C_n^2 3^{n-2}$，

$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{C_n^2 3^{n-2}}=\frac{2}{3^{n-2}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{3^n}{a_n}=3^2\times 2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

$$\therefore \frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^{18}}{a_{18}}=3^2\times 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{18}\right)\right]=17\text{。}$$

10、已知数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列，$a_1=1$，公比q是$\left(x+\frac{1}{4x^2}\right)^4$的展开式的第二项（按$x$的降幂排列）

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项a_n与前n项和S_n；

（2）若$A_n=C_n^1S_1+C_n^2S_2+\cdots+C_n^nS_n$，求$A_n$。

解：（1）由$q=C_4^1x^3\cdot\left(\frac{1}{4x^2}\right)^1=x\Rightarrow a_n=x^{n-1}$；

①当$x=1$时，$S_n=n$；②当$x\neq1$时，$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$；即：$S_n=\begin{cases}n\left(x=1\right)\\ \frac{1-x^n}{1-x}\left(x\neq1\right)\end{cases}$；

（2）①当$x=1$时，$A_n=C_n^1S_1+C_n^2S_2+\cdots+C_n^nS_n=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+nC_n^n$

$$=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\right)=n\cdot2^{n-1};$$

②当$x\neq1$时，$A_n=C_n^1S_1+C_n^2S_2+\cdots+C_n^nS_n$

$$=\frac{1}{1-x}\left(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n\right)-\frac{1}{1-x}\left(C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}\left(2^n-1\right)-\frac{1}{1-x}\left[\left(1+x\right)^n-1\right]=\frac{2^n-\left(1+x\right)^n}{1-x};$$

即：$A_n=\begin{cases}n\cdot2^{n-1}\left(x=1\right)\\ \frac{2^n-\left(1+x\right)^n}{1-x}\left(x\neq1\right)\end{cases}$。

【训练题】

1. $\left(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是

A.14　　B.－14　　C.42　　D.－42

当 $-\frac{r}{2}+3(7-r)=0$，即 $r=6$ 时，它为常数项，$\therefore C_7^6(-1)^6 2^1=14.$ 所以答案为 A.

2. $C_{2n}^2+C_{2n}^4+C_{2n}^6+\cdots+C_{2n}^{2k}+\cdots C_{2n}^{2n}$ 的值为

(　　)

A. 2^n　　B. 2^{2n-1}　　C. 2^{n-1}　　D. $2^{2n-1}-1$

D.

3. 已知 $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数的和是 128，则展开式中 x^5 的系数是 ____________.（以数字作答）

解： 设该二项展开式中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_7^r\left(x\sqrt{x}\right)^{7-r}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_7^r x^{\frac{63-11r}{6}}$，

令 $\frac{63-11r}{6}=5$，即 $r=3$ 时，x^5 项的系数为 $C_7^3=35$.

4. 设 $(2x-3)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_0+a_1+a_2+a_3$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 16　　C. -15　　D. 15

解： 令 $x=1$, 答案为 C.

5．已知 $(1-3x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$，则 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_9|$ 等于（　　）

A.2^9　　B.4^9　　C.3^9　　D.1

答案为 B.

6.若 $n\in N^*$，则 $C_n^0 3^n-C_n^1 3^{n-1}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}3+(-1)^n C_n^n 3^0$ 的值是______.

解： 2^n

7.求 2^{30} 除以 9 所得的余数.

解： $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}=(9-1)^{10}=9^{10}-C_{10}^1\cdot 9^9+C_{10}^2\cdot 9^8-\cdots-C_{10}^9\cdot 9+C_{10}^{10}$，其中前 10 项中至少含有 1 个 9，于是 230 除以 9 所得余数为 1.

高二数学 第16讲 空间向量

【知识梳理】

1.空间向量的有关概念及线性运算

空间向量的大小模，零向量，平行向量

空间向量的加法与数乘向量运算律：

2.空间向量的有关定理

3.空间向量的数量积　　　　**4.平面的法向量**

5.空间的角

①若异面直线l_1,l_2的方向向量为$\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$，；$l_1$与$l_2$所成的角为$\alpha$，则$\cos\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\rangle\right|$

②已知直线l的方向向量为$\vec{v}$，平面α的法向量$\vec{u}$，l与平面α的夹角为α，则$\sin\alpha=\left|\cos\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\right|$

③ 已知二面角$\alpha-l-\beta$的两个面α和β的法向量分别为$\vec{v}$，$\vec{u}$，则$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$与该二面角相等或互补；

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

3．空间的距离

若平面α的一个法向量为$\vec{u}$，P是平面α外一点，A是α内任一点，则点P到平面α的距离$d=\dfrac{\left|P\vec{A}\bullet\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

【例题解析】

1、在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为AC与BD的交点，若$\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a},\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b},\overrightarrow{A_1A}=\vec{c}$.则下列向量中与$\overrightarrow{B_1M}$相等的向量是（　）.

（A）$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　　（B）$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

（C）$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　　（D）$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

答案：A

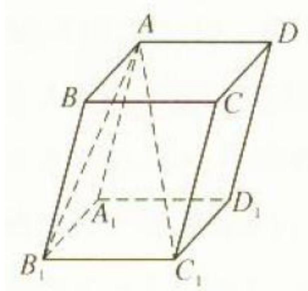
2、棱长为a的正四面体中，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$___.

答案：$-\frac{1}{2}a^2$

3、向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$两两垂直，且$|\vec{a}|=|\vec{c}|=1,|\vec{b}|=2$，$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，则$\vec{p}$与$\vec{a}$的夹角是__.

答案：$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$

4、平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为2，$\angle B_1A_1D_1=\angle AA_1B_1=\angle AA_1D_1=120^\circ$，则$AC_1=$______，$\angle B_1C_1A=$______.



答案：$4,60^\circ$

5、若$\vec{a}=(x,1,-2),\vec{b}=(1,x^2,2-x)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$x$的取值范围是__.

答案：$-4<x<1$

6、已知$3\vec{a}-2\vec{b}=(-2,0,4),\vec{c}=(-2,1,2)$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=m,|\vec{b}|=4$，$\theta$为$\vec{b}$与$\vec{c}$所成的角.

（1）当$m=2$时，求θ的值；

（2）当m为何值时，θ的值最大？并求出此时$\vec{b}$的坐班.

答案：（1）$\pi-\arccos\frac{1}{4}$，（2）当$m=-4$时，$\theta_{\max}=\pi$，$\vec{b}=(\frac{8}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})$

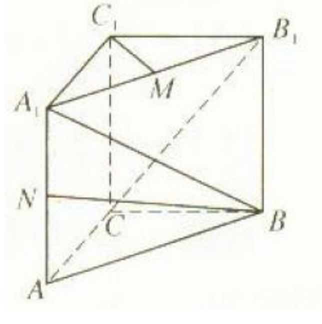
7、棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，在棱DD_1上是否存在点P，使得$B_1D\perp$面PAC？

答案：点P与D_1重合时，$B_1D\perp$面PAC.

8、如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ,AA_1=2$，$M$、$N$分别为$A_1B_1$、$A_1A$的中点.

（1）求$\overrightarrow{BN}$的长；

（2）求$\overrightarrow{BA_1}$、$\overrightarrow{CB_1}$所成的角的余弦值；



（3）求证：$A_1B \perp C_1M$.

答案：（1）$\sqrt{3}$，（2）$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，（3）略

9、已知直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，点 D_1, E_1 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点，若 $BC = CA = CC_1$，则 BD_1 与 AE_1 所成角的余弦值是________.

答案：$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

10、已知在直棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AA_1 = 4, AC = 4, BC = 3$，D 为 A_1B_1 的中点，求 AC 与 BD 所成角的大小.

答案：$\arccos\dfrac{4\sqrt{89}}{89}$

11、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，过顶点 B, D, C_1 作截面，则二面角 $B - DC_1 - C$ 的大小是__________（用反三角函数表示）.

答案：$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12、在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3, AD = 4$，$PA \perp 平面ABCD$，$PA = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，那么二面角 $A - BD - P$ 的大小为________.

答案：30°

13、在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的大小是_____.

答案：30°

14、若 P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中棱 A_1B_1 的中点，则截面 PC_1D 和平面 AA_1B_1B 所成二面角的正切值为________.

答案：$2\sqrt{2}$

15、已知三棱锥 $P - ABC$ 中，$PA \perp 平面PBC$，$PA = 2, PB = PC = 4$，$\angle BPC = 120^\circ$，求二面角 $B - AC - P$ 的大小.

答案：$\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

16、已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1，高为 $h(h>2)$，动点 M 在侧棱 BB_1 上移动，设 AM 与侧面 BB_1C_1C 所成的角为 θ.

（1）当 $\theta\in[30^\circ,45^\circ]$ 时，求点 M 到平面 ABC 的距离的取值范围；

（2）当 $\theta=30^\circ$ 时，求向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的大小.

答案：（1）$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},2]$；（2）$\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

【训练题】

1、已知空间四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{CD}=\vec{b}$，对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，则 $\overrightarrow{EF}=$______.

答案：$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

2、$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，P 为面 ABC 外一点，且 $PA\perp$ 面ABC，F 为 PB 的中点，G 为 $\triangle PBC$ 的重心，若 $\overrightarrow{FG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AP}$，则 $x=$____$,y=$____$,z=$____.

答案 $x=-\dfrac{1}{6},y=\dfrac{1}{3},z=-\dfrac{1}{6}$

3、已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是空间两非零向量，$\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，且 $\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，则向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角大小为_______.

答案：60°

4、若 $\vec{a}=(2x,-1,4),\vec{b}=(1,3y,6)$，如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为共线向量，则 $x=$___$,y=$___.

答案：$x=\dfrac{1}{3},y=-\dfrac{1}{2}$

5、已知 $A(3,2,1)B(1,0,4)$.

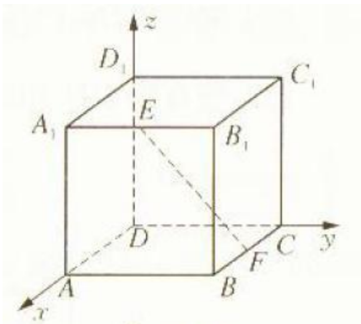
（1）求线段 AB 的中点坐标和长度；

（2）若直线 AB 与 xOy 平面相交与点 C，求点 C 的坐标；

（3）若 z 轴上有一点 P 到 A、B 两点距离相等，求点 P 的坐标.

答案：（1）$M(2,1,\frac{5}{2})$、$\sqrt{17}$，（2）$C(\frac{11}{3},\frac{8}{3},0)$，（3）$P(0,0,\frac{1}{2})$

6、如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 A_1B_1,BC 的中点，若 $\vec{d}$ 是直线 EF 的方向向量，且 $|\vec{d}|=\sqrt{6}$，则 $\vec{d}=$____.



答案：$\pm(1,-1,2)$

7、已知 $\overrightarrow{AB}=(2,2,1),\overrightarrow{AC}=(4,5,3)$，则平面 ABC 的单位法向量为_______.

答案：$\pm(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

8、已知平面 α 经过点 $A(3,1,-1,),B(1,-1,0)$，且平行与向量 $\vec{d}=(-1,0,2)$，求平面 α 的一个法向量.

答案：$(2,-\frac{3}{2},1)$

9、在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=1$，$AB=2$，E 是 AB 的中点，则 AA_1 与 D_1E 所成角的大小是_____.

答案：$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

10、平面 α 的一个法向量为 $\vec{m}=(a,0,1)$，直线 l 的一个方向向量为 $\vec{n}=(3,-4,5)$，若直线 l 与平面 α 所成角为 30°，则正数 $a=$_____.

答案：$\frac{30+5\sqrt{43}}{7}$

11、在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 BC,CD 的中点，则直线 A_1D 与平面

EFD_1B_1 所成角的大小为______.

答案：$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$

12、在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AD=1, AA_1=1$，则直线 BC_1 与平面 D_1AC 的距离为______.

答案：$\frac{2}{3}$

高二数学 第 17 讲 概率统计

【知识梳理】

1.随机事件的概率

①试验 ②事件

2.古典概率模型

（1）一次试验所有的基本事件只有有限个；

（2）每个基本事件出现的可能性相等，这样两个特点的概率模型叫做古典概型

3.频率与概率

平均数 中位数 众 数

4.总体和样本

$\sigma^2=\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2}{N}$，其平方根 σ 称为总体标准差

5.抽样技术

（1）随机抽样（2）系统抽样（3）分层抽样

6.统计估计

可以用样本的标准差 $s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1}}$

作为总体标准差的点估计值.

【例题解析】

1、一枚硬币连掷 3 次，只有一次出现正面的概率为__________。

解：一枚硬币连掷 3 次可出现 $2^3=8$ 种结果，其中只有一次出现正面的情况有 $C_3^1=3$ 种，所求概率为 $P=\frac{3}{8}$。

2、若某学校要从5名男生和2名女生中选出3人作为上海世博会的志愿者，则选出的志愿者中男女生均不少于1名的概率是__________（结果用最简分数表示）。

解：因为只有2名女生，所以选出3人中至少有一名男生，当选出的学生全是男生时有：C_5^3，

其概率为：$P=\dfrac{C_5^3}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$，∴，均不少于1名的概率为：$1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$。

3、从编号为$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$的10个大小相同的球中任取4个，则所取4个球的最大号码是6的概率是__________。

解：从10个球中任取4个球共有C_{10}^4种结果，最大号码为6的4个球中，有3个球从$1\sim5$号5个球中任取共有C_5^3种结果，故其概率为$P=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{21}$。

4、在一个口袋中装有5个黑球和3个白球，这些球除颜色外完全相同，从中摸出3个球，则摸出白球的个数多于黑球的个数的概率为（　　）

A）$\dfrac{3}{8}$　　B）$\dfrac{3}{7}$　　C）$\dfrac{2}{7}$　　D）$\dfrac{9}{28}$

解：依题意，白球的个数多于黑球的个数的情况有2白1黑、3白两种，其概率为：

$P=\dfrac{C_3^2C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{2}{7}$；∴C）正确。

5、有20张卡片，每张卡片上分别标有两个连续的自然数$k,k+1$，其中$k=0,1,2,\cdots,19$；从这20张卡片中任取一张，记事件“该卡片上两个数的各位数字之和（例如：若取到标有9,10的卡片，则卡片上两个数的各位数字之和为$9+1+0=10$）不小于14”为A，则$P(A)=$__________。

解：从20张卡片中任取一张共有20种可能，其中各卡片上的数字之和大于等于14的有$(7,8),(8,9),(16,17),(17,18),(18,19)$共5种，∴满足各条件的概率为$P=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$。

6、若随机从集合$\left\{2,2^2,2^3,\cdots,2^{10}\right\}$中选出两个不同的元素$a$、$b$，则$\log_a b$为整数的概率为__________。

解：（1）当$a=2$时，有9个；（2）当$a=2^2$时，$b=2^4$或2^6或2^8或2^{10}，共4个；

（3）当$a=2^3$时，$b=2^6$或2^9，共2个；（4）当$a=2^4$时，$b=2^8$，共1个；

（5）当 $a=2^5$ 时，$b=2^{10}$，共1个；$\therefore$使$\log_a b$为整数的有：17 个；

$\therefore$概率 $P=\dfrac{17}{P_{10}^2}=\dfrac{17}{90}$。

7、袋中装有大小均匀分别写有$1,2,3,4,5$五个号码的小球各一个，现从中有放回地任取三球，求下列事件的概率；

（1）三球号码完全不同；（2）三球号码中不含4和5；

（3）三球号码数2恰好出现两次。

解：从5个球中抽取第1个球有5种选择，抽取第2个球也有5种选择，抽取第3个球还是5种选择；故由分步计数原理知这样抽取的结果数为5^3；

（1）记“三球号码完全不同”为事件A，则事件A相当于3个球排在5个位置中的3个位置，结果数为P_5^3，故$P\left(A\right)=\dfrac{P_5^3}{5^3}=\dfrac{12}{25}$；

（2）记“三球号码中不含4和5”为事件B，则结果数为3^3，$\therefore P\left(B\right)=\dfrac{3^3}{5^3}=\dfrac{27}{125}$；

（3）记“三球号码数2恰好出现两次”为事件C，则结果数为$C_3^2C_4^1$，故$P\left(C\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{5^3}=\dfrac{12}{125}$。

8、一个单位有职工800人，其中具有高级职称的160人，具有中级职称的320人，具有初级职称的200人，其余人员120人、为了解职工收入情况，决定采用分层抽样的方法，从中抽取容量为40的样本，则从上述各层中依次抽取的人数分别是________。

解：由抽样比$k=\dfrac{40}{800}=\dfrac{1}{20}$，$\therefore$从各层依次抽取的人数为$160\times\dfrac{1}{20}=8$，$320\times\dfrac{1}{20}=16$，$200\times\dfrac{1}{20}=10$，$120\times\dfrac{1}{20}=6$。

9、从长度分别为$2,3,4,5$的四条线段中任意取出三条，以这三条线段为边可以成三角形的概率是______。

解：从长度为$2,3,4,5$的四条线段中任意取出三条共有4种不同的取法，其中可以构成三角形的有$\left(2,3,4\right)$、$\left(2,4,5\right)$、$\left(3,4,5\right)$三种，故所求概率为$P=\dfrac{3}{4}$。

10、从5张10元，3张200元，2张300元的奥运预赛门票中任取3张，则所取3张中

至少有2张价格相同的概率为__________。

解：“3张中至少有2张价格相同”的对立事件是“3张门票价格均不相同”，则所求概率 $P=1-\dfrac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$。

11、若三个数 a_1,a_2,a_3 的方差为 1，则 $3a_1+2,3a_2+2,3a_3+2$ 的方差为________。

解：由 $s^2=\dfrac{\left(a_1-\overline{x}\right)^2+\left(a_2-\overline{x}\right)^2+\left(a_3-\overline{x}\right)^2}{3}=1\Rightarrow\left(a_1-\overline{x}\right)^2+\left(a_2-\overline{x}\right)^2+\left(a_3-\overline{x}\right)^2=3$

$$\Rightarrow s'^2=\frac{\left(3a_1+2-\overline{x'}\right)^2+\left(3a_2+2-\overline{x'}\right)^2+\left(3a_3+2-\overline{x'}\right)^2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(3a_1+2-3\overline{x}-2\right)^2+\left(3a_2+2-3\overline{x}-2\right)^2+\left(3a_3+2-3\overline{x}-2\right)^2\right]$$

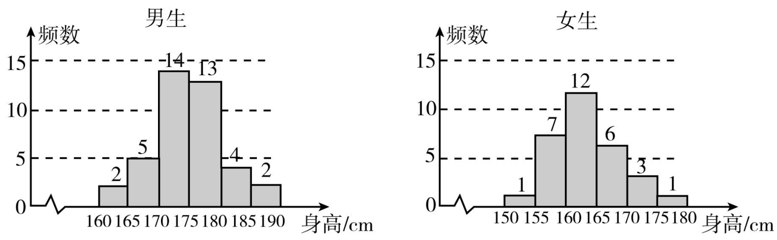
$$=\frac{1}{3}\left[9\left(a_1-\overline{x}\right)^2+9\left(a_2-\overline{x}\right)^2+9\left(a_3-\overline{x}\right)^2\right]=9\text{。}$$

12、为了解学生身高情况，某校以 10% 的比例对全校 700 名学生按性别进行分层抽样调查，测得身高情况的统计图如下：

（1）估计该校男生的人数；

（2）估计该校学生身高在 $170\sim185cm$ 之间的概率；

（3）从样本中身高在 $165\sim180cm$ 之间的女生中任选 2 人，求至少有 1 人身高在 $170\sim180cm$ 之间的概率。



解：（1）样本中男生人数为 40，由分层抽样比例为 10% 估计全校男生人数为 400；

（2）由统计图知，样本中身高在 $170\sim185cm$ 之间的学生有：$14+13+4+3+1=35$ 人，样本容量为 70，$\therefore$ 样本中学生身高在 $170\sim185cm$ 之间的频率：$f=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{2}$；故由 f 估计该校学生身高在 $170\sim185cm$ 之间的概率 $P=\dfrac{1}{2}$；

（3）样本中女生身高在 $165\sim180cm$ 之间的人数为 10，身高在 $170\sim180cm$ 之间人数为 4；设 A 表示事件“从样本中身高在 $165\sim180cm$ 之间的女生中任取 2 人，至少有 1 人身高在 $170\sim180cm$ 之间”；

$\therefore P\left(A\right)=1-\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{3}$ 或 $P\left(A\right)=\dfrac{C_6^1\cdot C_4^1+C_4^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{3}$。

13、在某地的奥运火炬传递活动中，有编号为$1,2,3,\cdots,18$的18名火炬手、若从中任选3人，则选出的火炬手的编号能组成以3为公差的等差数列的概率为 （　　）

A）$\dfrac{1}{51}$　　B）$\dfrac{1}{68}$　　C）$\dfrac{1}{306}$　　D）$\dfrac{1}{408}$

解：基本事件的总数是C_{18}^3，能组成公差为3的等差数列的基本事件是$\left(1,4,7\right),\left(2,5,8\right),\cdots,\left(12,15,18\right)$共$12$个，故这个概率是$P=\dfrac{12}{C_{18}^3}=\dfrac{1}{68}$；$\therefore$B）正确。

14、在教室内有10个学生，分别佩带着从1号到10号的校徽，任意取3人记录其校徽的号码；（1）求最小号码为5的概率；（2）求3个号码中至多有一个是偶数的概率；（3）求3个号码之和不超过9的概率。

解：（1）从10人中任取3人，共有C_{10}^3种，最小号码为5，相当于从$6,7,8,9,10$共五个数中任取2个，则共有C_5^2种结果；则最小号码为5的概率为$P=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$；

（2）选出3个号码中至多有一个是偶数，包括没有偶数和恰有一个偶数两种情况，共有$C_5^3+C_5^1C_5^2$种；所以满足条件的概率为$P=\dfrac{C_5^3+C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$；

（3）3个号码之和不超过9的可能结果有：$\left(1,2,3\right),\left(1,2,4\right),\left(1,2,5\right),\left(1,2,6\right),\left(1,3,4\right),\left(1,3,5\right),\left(2,3,4\right)$；则所求概率为$P=\dfrac{7}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{120}$。

15、某农场计划种植某种新作物，为此对这种作物的两个品种（分别称为品种家和品种乙）进行田间试验、选取两大块地，每大块地分成n小块地，在总共$2n$小块地中，随机选n小块地种植品种甲，另外n小块地种植品种乙；

（1）假设$n=2$，求第一大块地都种植品种甲的概率；

（2）试验时每大块地分成8小块，即$n=8$，试验结束后得到品种甲和品种乙在个小块地上的每公顷产量（单位：kg/hm^2）如下表：

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406

品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙的每公顷产量的样本平均数和样本方差；根据试验结果，你认为应该种植哪一品种？

解：（1）设第一大块地中的两小块地编号为$1,2$，第二大块地中的两小块地编号为$3,4$；令事件$A=$“第一大块地都种品种甲”；从4小块地中任选2小块地种植品种甲的基本事件共6个：$(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$；而事件$A$包含$1$个基本事件：$(1,2)$，∴$P(A)=\frac{1}{6}$；

（2）品种甲的每公顷产量的样本平均数和样本方差分别为：

$$\overline{x_{甲}}=\frac{1}{8}(403+397+390+404+388+400+412+406)=400,$$

$$S_{甲}^2=\frac{1}{8}\left[3^2+(-3)^2+(-10)^2+4^2+(-12)^2+0^2+12^2+6^2\right]=57.25;$$

品种乙的每公顷产量的样本平均数和样本方差分别为：

$$\overline{x_{乙}}=\frac{1}{8}(419+403+412+418+408+423+400+413)=412,$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{8}\left[7^2+(-9)^2+0^2+6^2+(-4)^2+11^2+(-12)^2+1^2\right]=56;$$

由以上结果可以看出，品种乙的样本平均数大于品种甲的样本平均数，且两品种的样本方差差异不大，故应该选择种植品种乙。

【训练题】

1、从$\{1,2,3,4,5\}$中随机选取一个数为a，从$\{1,2,3\}$中随机选取一个数为b，则$b>a$的概率是_________。

解：分别从两个集合中各取一个数，共有$C_5^1\cdot C_3^1=15$种取法，其中满足$b>a$的有3种取法，

故所求事件的概率为$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$。

2、2012年伦敦奥运会我国将派5名正式运动员和3名替补运动员参加体操比赛，最终将有3人上场比赛，其中甲、乙两名替补运动员均不上场比赛的概率是___________。

解：由等可能事件知概率为：$P=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$。

3、从$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$这10个数中任意抽取三个数，其中至少有两个数是连续整数的概率是__________。

解：现在有七把椅子，也就有八个空隙，在八个空隙中插入三把特殊的椅子，然后依次编号，特殊椅子的编号即为所求；$\therefore P=1-\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=1-\dfrac{54}{120}=\dfrac{8}{15}$。

4、有一组统计数据共10个，它们是：$2,4,4,5,5,6,7,8,9,x$，已知这组数据的平均数为6，则这组数据的方差为__________。

解：由$\dfrac{2+4+4+5+5+6+7+8+9+x}{10}=6\Rightarrow x=10$

$$\Rightarrow s^2=\frac{1}{10}\left[(2-6)^2+(4-6)^2+\cdots+(10-6)^2\right]=5.6$$。

5、某高中在校学生2000人，高一级与高二级人数相同并都比高三级多1人，为了响应“阳光体育运动”号召，学校举行了“元旦”跑步和登山比赛活动、每个人都参加而且只参与了其中一项比赛，各年级参与比赛人数情况如下表：

	高一级	高二级	高三级
跑步	a	b	c
登山	x	y	z

其中$a:b:c=2:3:5$，全校参与登山的人数占总人数的$\dfrac{2}{5}$，为了了解学生对本次活动的满意程度，从中抽取了一个200人的样本进行调查，则高二级参与跑步的学生中应抽取（　　）

A）36人　　B）60人　　C）24人　　D）30人

解：由登山占总数的$\dfrac{2}{5}$，故跑步的占总数的$\dfrac{3}{5}$，又跑步中高二级占$\dfrac{3}{2+3+5}=\dfrac{3}{10}$；

$\therefore$高二级跑步的占总人数的$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$；由$\dfrac{9}{50}=\dfrac{x}{200}\Rightarrow x=36$；$\therefore$A）正确。

高二数学 第18讲 期末复习

【知识梳理】

立体几何、空间向量、二项式定理、排列组合、概率统计

【例题解析】

1、如果圆锥的底面圆半径长为1，母线长为2，则该圆锥的侧面积为___2π________.

2、某校开设9门课程供学生选修，其中A、B、C三门由于上课时间相同，至多选一门；学校规定，每位同学选修4门，共有________种不同的选修方案。

解：第一类：若从A、B、C三门选一门有：$C_3^1C_6^3=60$种，第二类：若从其它六门选4门有$C_6^4=15$种；∴共有$N=C_3^1C_6^3+C_6^4=75$种不同的方法。

3、在棱长为a的正四面体中，相对两条棱间的距离为_______。

4、与不共面的四点距离都相等的平面共有_______个。

5、一个长方体共一个顶点的三个面的面积分别是$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$，则长方体对角线的长是____。

6、在正三棱锥中

（1）若底面边长为$\sqrt{3}$，侧棱长为2，则其高为________。

（2）若侧棱长与底面边长之比为$2:3$，则高与斜高之比等于__________。

（3）若面边长为a，侧棱与底面所成的角是45^0，则其斜高等于__________。

（4）若棱长都是a，则以各侧面各中心为顶点的三角形面积等于__________。

（5）若侧棱长为$\sqrt{5}cm$，底面边为$2cm$，则侧面与底面所成的二面角为__________。

7、由$1,2,3,4,5,6$组成没有重复数字且$1,3$都不与5相邻的六位偶数的个数是（　　）

A）72　　B）96　　C）108　　D）144

解：从$2,4,6$三个偶数中选一个数放在个位，有C_3^1种方法，将其余两个偶数全排列，有P_2^2种排法，当$1,3$不相邻且不与5相邻时有P_3^3种方法，当$1,3$相邻且不与5相邻时有$P_3^2P_2^2$种方法；故满足题意的偶数个数有$C_3^1P_2^2\left(P_3^3+P_3^2P_2^2\right)=108$个；∴C）正确。

8、如果四棱锥的四条侧棱都相等，就称它为“等腰四棱锥”，四条侧棱称为它的腰，以下4个命题中，假命题是（　　）

A）等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

B）等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

C）等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

D）等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

9、有4名男生、5名女生，全体排成一行，问下列情形各有多少种不同的排法？

（1）甲不在中间也不在两端；（2）甲、乙两人必须排在两端；

（3）男、女生分别排在一起；（4）男女相间；

（5）甲、乙、丙三人从左到右顺序保持一定。

解:（1）方法一:（特殊元素优先考虑）先排甲有6种，其余有P_8^8种，故共有$6P_8^8=241920$种排法；方法二:（特殊位置优先考虑）中间和两端有P_8^3种排法，包括甲在内的其余6人有P_6^6种排法，故共有$P_8^3\cdot P_6^6=241920$种排法；

方法三:（位置等可能）9个人的全排列数有P_9^9种，甲排在每一个位置的机会都是均等的，依题意，甲不在中间及两端的排法总数是$P_9^9\times\dfrac{6}{9}=241920$种；

方法四:（间接法）$P_9^9-3P_8^8=241920$种；（2）（特殊元素优先考虑）先排甲、乙，再排其余7人，共有$P_2^2P_7^7$=10800种排法；　（3）（捆绑法）$P_2^2\cdot P_4^4\cdot P_5^5=5760$；

（4）（插空法）先排4名男生有P_4^4种方法，再将5名女生插空，有P_5^5种方法，共有$P_4^4\cdot P_5^5=2880$种排法；（5）方法一:（位置等可能）9人共有P_9^9种排法，其中甲、乙、丙三人有P_3^3种排法，因而在P_9^9种排法中每P_3^3种对应一种符合条件的排法，故共有$\dfrac{P_9^9}{P_3^3}=60480$种排法；方法二:$C_9^3\cdot P_6^6=60480$种。

10、某企业有3个分厂生产同一种电子产品，第一、二、三分厂的产量之比为$1:2:1$，用分层　抽样方法（每个分厂的产品为一层）从3个分厂生产的电子产品中共取100件作使用寿命的测试，由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均值分别为$980h,1020h,1032h$，则抽取的100件产品的使用寿命的平均值为__________。

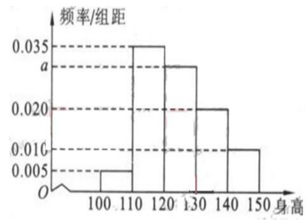
解:$\bar{x}=\dfrac{980\times1+1020\times2+1032\times1}{4}=1013$

11、从集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中，选出由5个数组成的子集，使得这5个数中的任何两个数的和不等于11，则这样的子集共有________。

解:由$1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11$，选出的5个数中任何两个数的和不等于11，$\therefore$从$\{1,10\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\}$这五组数每组中选$1$个数，则这样的子集共有：

$N=C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot=32$（个）。

12、从某小学随机抽取100名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图(如图)。由图中数据可知$a=$________；若要从身高在$[120,130)$，$[130,140)$，$[140,150]$三组内的学生中，用分层抽样的方法选取18人参加一项活动，则从身高在$[140,150]$内的学生中选取的人数应为________。



解：由各个小组的频率之和为1，可得$a=0.030$；而三组身高区间的人数比为$3:2:1$，由分层抽样的原理不难得到$140\sim150$区间内的人数为3人。

13、某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价分别为60元的单片软件和70元的盒装磁盘；根据需要，软件至少买3张，磁盘至少买2盒；则不同的选购方式共有多少种？

解：可设购买60元的单片软件和70元的盒装磁盘分别为x片、y盒，依照所用资金不超过500元，来建立数学模型，从而解决问题；设购买单片软件x片，y盒装磁盘盒，则依题意有

$60x+70y\le500\left(x,y\in N^*,x\ge3,y\ge2\right)$按购买$x$片分类；$x=3$，则$y=2,3,4$，共$3$种方法；$x=4$，则$y=2,3$，共$2$种方法；$x=5$，则$y=2$，共$1$种方法；$x=6$，则$y=2$，共$1$种方法；依分类计数原理不同的选购方式有：$N=3+2+1+1=7$（种）。

14、在$\left(x+\sqrt[4]{3}y\right)^{20}$的展开式中，系数为有理数的项共有_______项。

解：由$T_{r+1}=C_{20}^{r}x^{20-r}\left(\sqrt[4]{3}y\right)^{r}=C_{20}^{r}3^{\frac{r}{4}}x^{20-r}y^{r}$，当$r=0,4,8,12,16,20$时，相应的项的系数是有理数，$\therefore\left(x+\sqrt[4]{3}y\right)^{20}$的展开式中，系数是有理数的项共有$6$项。

15、在甲、乙等6个单位参加的一次“唱读讲传”演出活动中，每个单位的节目集中安排在一起，若采用抽签的方式随机确定各单位的演出顺序（序号为$1,2,\cdots,6$），求：

（1）甲、乙两单位的演出序号均为偶数的概率；

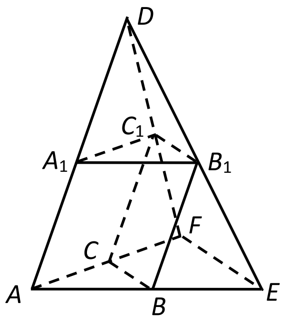
（2）甲、乙两单位的演出序号不相邻的概率。

解：甲、乙两单位可能排列在6个位置中的任意2个，有$P_6^2=30$种等可能的结果；

（1）设A表示“甲、乙的演出序号均为偶数”则A包含的结果有$P_3^2=6$种；故所求概率为$P\left(A\right)=\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$；（2）设$B$表示“甲、乙两单位的演出序号不相邻”，则$\overline{B}$表示甲、乙两单位序号相邻，$\overline{B}$包含的结果有$5\times2!=10$种；故所求概率为

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{10}{30}=\frac{2}{3}$。

16、如图，在三棱锥 $D-AEF$ 中，A_1,B_1,C_1 分别是 DA,DE,DF 的中点，B,C 分别是 AE,AF 的中点，设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1，三棱锥 $D-AEF$ 的体积为 V_2，则 $V_1:V_2=$ ___$3:8$______.



17、如图 1，一个正四棱柱形的密闭容器水平放置，其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块，容器内盛有 a 升水时，水面恰好经过正四棱锥的顶点 P，如果将容器倒置，水面也恰好过点 P（图 2）；

有下列四个命题：

（1）正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半

（2）将容器侧面水平放置时，水面也恰好过点 P

（3）任意摆放该容器，当水面静止时，水面都恰好经过点 P

（4）若往容器内再注入 a 升水，则容器恰好能装满

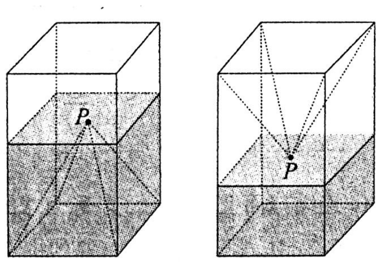
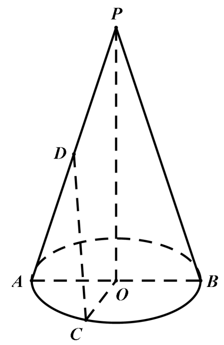


图1　　图2

其中真命题的代号是_____。（写出所有真命题的代号）

18. 如图，圆锥的底面半径 $OA=2$，高 $PO=6$，点 C 是底面直径 AB 所对弧的中点，点 D 是母线 PA 的中点.

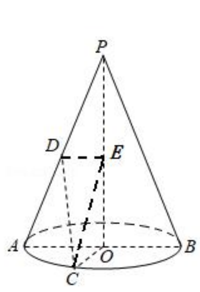
（1）求圆锥的侧面积与体积；（2）求异面直线 CD 与 AB 所成角的大小（结果用反三角函数表示）.



解：（1）由题意，得 OA＝2，PO＝6，$\therefore PA=\sqrt{PO^2-OA^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $S=\pi rl=\pi\times2\times2\sqrt{10}=4\sqrt{10}\pi$；

体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times6=8\pi$（2）取 PO 的中点 E，连接 DE，CE，则 $\angle CDE$ 或其补角即为所求，如图所示；因 $AO\perp EO$，$AO\perp CO$，$EO\cap CO=O$ 知，$AO\perp$ 平面 ECO 又 $DE//AO$，$\therefore DE\perp$ 平面 ECO，$\therefore DE\perp EC$，$\therefore \Delta DEC$ 是 $RT\Delta$

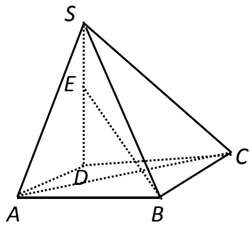


由 $DE=\frac{1}{2}OA=1$，$CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=\sqrt{2^2+3^3}=\sqrt{13}$

$\therefore \angle CDE=\arctan\sqrt{13}$，即异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $\arctan\sqrt{13}$.

19.如图，四棱锥$S-ABCD$的底面是正方形，$SD\perp$平面$ABCD, SD=AD=a$，点E是线段SD上任意一点．（1）求证：$AC\perp BE$；

（2）试确定点E的位置，使BE与平面$ABCD$所成角的大小为30°．



（1） 证明：联结BD，因为四边形$ABCD$为正方形，

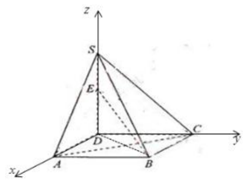
所以，$AC\perp BD$，

又因为$SD\perp$平面$ABCD$，$AC\subsetneqq$平面$ABCD$，所以$AC\perp SD$．

由$\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp SD \\ BD\cap SD=D \end{cases}\Rightarrow AC\perp$平面$SBD$．又因为$BE\subsetneqq$平面$SED$，所以$AC\perp BE$．

（2）解法一：设$ED=t$，因为$SD\perp$平面$ABCD$，所以BE与平面$ABCD$所成角为$\angle EBD$．

在$Rt\Delta EDB$中，由$\tan\angle EBD=\tan 30^\circ=\dfrac{t}{\sqrt{2}a}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$．所以，



当$ED=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$时，BE与平面$ABCD$所成角的大小为30°．

解法 2：（1）以D为坐标原点，建立空间直角坐标系．

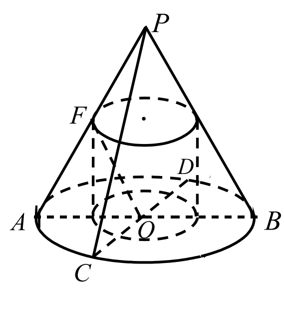
$D(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$．设$DE=t$，则$E(0,0,t)$ 则$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-a,-a,t)$ 因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=a^2-a^2+0=0$，所以$AC\perp BE$ （2）取平面$ABCD$的一个法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$ 因为$\overrightarrow{BE}=(-a,-a,t)$，可知直线$BE$的一个方向向量为$\vec{d}=(-a,-a,t)$．设$BE$与平面$ABCD$所成角为$\theta$，由题意知$\theta=30^\circ$．$\vec{d}$与$\vec{n}$所成的角为$\varphi$，则$cos\varphi=\dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{t}{\sqrt{a^2+a^2+t^2}}$，因为$sin\theta=|cos\varphi|=\dfrac{1}{2}$，所以，

$\dfrac{|t|}{\sqrt{a^2+a^2+t^2}}=\dfrac{1}{2}$，解得，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$．当$ED=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$时，$BE$与平面$ABCD$所成角的大小为$30^\circ$．

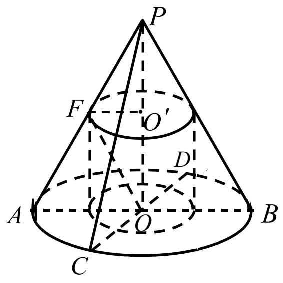
20. 如图，在一个圆锥内作一个内接圆柱（圆柱的下底面在圆锥的底面上，上底面的圆在圆锥的侧面上)，圆锥的母线长为4，AB、CD是底面的两条直径，且$AB=4$，$AB\perp CD$，圆柱与圆锥的公共点F恰好为其所在母线PA的中点，点O是底面的圆心．

（1）求圆柱的侧面积；

（2）求异面直线OF和PC所成的角的大小．



[解]（1）设圆柱上底面的圆心为O'，在$\triangle PAO$中，F是PA的中点，$FO'//AO$，$OA=2$，$\therefore FO'=1$，$OO'=\sqrt{3}$，



$\therefore S_{圆柱侧}=2\pi rh=2\sqrt{3}\pi$

（2）F、O分别是PA、AB的中点，$\therefore FO \parallel PB$

$\therefore$异面直线OF和PC所成的角等于PB和PC的夹角$\angle BPC$．$PB=PC=4$，$BC=2\sqrt{2}$，　$\cos\angle BPC=\dfrac{16+16-8}{2\times4\times4}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore$异面直线OF和PC所成的角为$\arccos\dfrac{3}{4}$.

【训练题】

1、已知正方体外接球的体积是$\dfrac{32}{3}\pi$，那么正方体的棱长等于______。

2、设点$A(1,1)$、$B(1,-1)$，O是坐标原点，将ΔOAB绕y轴旋转一周，所得几何体的体积为________。

3、某同学有同样画册2本，同样的集邮册3本，从中取出4本赠送给4位朋友每位朋友1本，则不同的赠送方法共有___________。

解：分两种情形；

（1）一本画册，三本集邮册，共有：$C_4^1C_3^3$种；

（2）两本画册，两本集邮册，共有：$C_4^2C_2^2$种；

∴不同的赠送方法共有：$N=C_4^1C_3^3+C_4^2C_2^2=10$（种）。

4、现安排甲、乙、丙、丁、戊5名同学参加上海世博会志愿者服务活动，每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一，每项工作至少有一人参加；甲、乙不会开车但能从事其他三项工作，丙、丁、戊都能胜四项工作，则不同安排方案的种数是　　（　　）

A）152　　B）126　　C）90　　D）54

解一：若有2人从事司机工作，则方案有：$C_3^2\cdot P_3^3=18$；若有1人从事司机工作，则方案有：

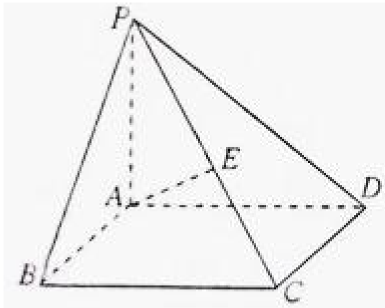
$C_3^1\cdot C_4^2\cdot P_3^3=108$种；∴共有$18+108=126$种；∴B）正确；

解二：$N=\frac{C_3^2\left(C_3^1C_2^1C_1^1\right)}{P_3^3}\times P_3^3+\frac{C_3^1\left(C_4^2C_2^1C_1^1\right)}{P_2^2}\times P_3^3=18+108=126$；∴B）正确。

5. 如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PA\perp$底面$ABCD$，E是PC的中点，已知$AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=2$．求：

（1）三角形PCD的面积；

（2）异面直线BC与AE所成的角的大小．



解：（1）因为在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PA\perp$底面$ABCD$，

所以$DC\perp AD, DC\perp PA$，所以$DC\perp PD$又$AD=2\sqrt{2}$，$PA=2$，所以在$Rt\Delta APD$中

$PD=2\sqrt{3}$，在$Rt\Delta PDC$中$CD=2, PD=2\sqrt{3}\Rightarrow S_{\Delta PCD}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$．

即三角形PCD的面积为$2\sqrt{3}$．（2）建立如图的空间直角坐标系$O-xyz$，由题意

可得$A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(2,2\sqrt{2},0)$，$B(2,0,0)$，$E(1,\sqrt{2},1)$，所以$\overrightarrow{BC}=(0,2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{2},1)$，设$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AE}$所成角为$\alpha$，则$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以异面直线BC与AE所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$．